第 1 章　古典制御理論から現代制御理論へ

1.3　多入力多出力システムに対する古典制御理論の限界

1.4　現代制御理論における多入力多出力システムの取り扱い

キーワード：SISO，MIMO，状態方程式，出力方程式

学習目標：古典制御理論で困難な多入力多出力システムを容易にする現代制御理論の重要性を理解する。

1 古典制御理論から現代制御理論へ

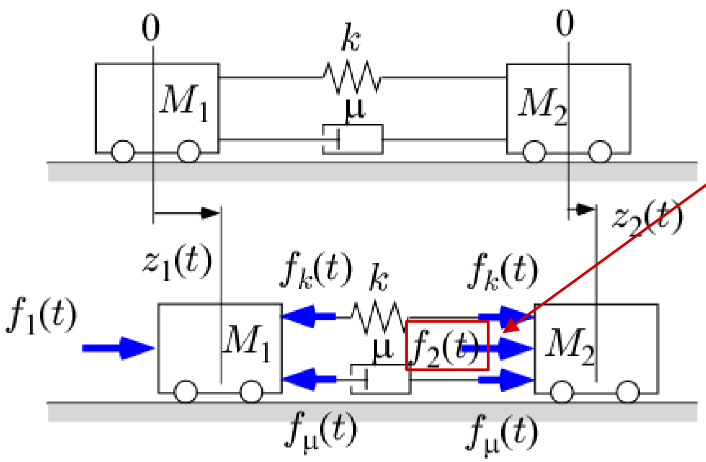
1.3 多入力多出力システムに対する古典制御理論の限界

SISO (Single-input single-output) : 1入力1出力

MIMO (Multiple-input multiple-output) : 多入力多出力

[例 1.4]

$$\begin{cases} M_1 \overset{\ddot{y}_1(t)}{\cancel{\ddot{z}_1(t)}} = \overset{u_1(t)}{\cancel{u(t)}} - \underbrace{k\big(\overset{y_1(t)}{\cancel{z_1(t)}} - \overset{y_2(t)}{\cancel{y(t)}}\big)}_{f_k(t)} - \underbrace{\mu\big(\overset{\dot{y}_1(t)}{\cancel{\dot{z}_1(t)}} - \overset{\dot{y}_2(t)}{\cancel{\dot{y}(t)}}\big)}_{f_\mu(t)} & \qquad (1.15a) \\ M_2 \underset{\ddot{y}_2(t)}{\cancel{\ddot{y}(t)}} = \underset{u_2(t)}{\cancel{}} \quad \underline{k\big(\underset{y_1(t)}{\cancel{z_1(t)}} - \underset{y_2(t)}{\cancel{y(t)}}\big)} + \underline{\mu\big(\underset{\dot{y}_1(t)}{\cancel{\dot{z}_1(t)}} - \underset{\dot{y}_2(t)}{\cancel{\dot{y}(t)}}\big)} & \qquad (1.15b) \end{cases}$$



台車2にも入力が加わる

$(1.15a)$ 式をラプラス変換

$$\left(M_1 s^2 + \mu s + k\right) y_1(s) = u_1(s) + (\mu s + k)\, y_2(s)$$

$(1.15b)$ 式をラプラス変換

$$\left(M_2 s^2 + \mu s + k\right) y_2(s) = u_2(s) + (\mu s + k)\, y_1(s)$$

以上のまとめる

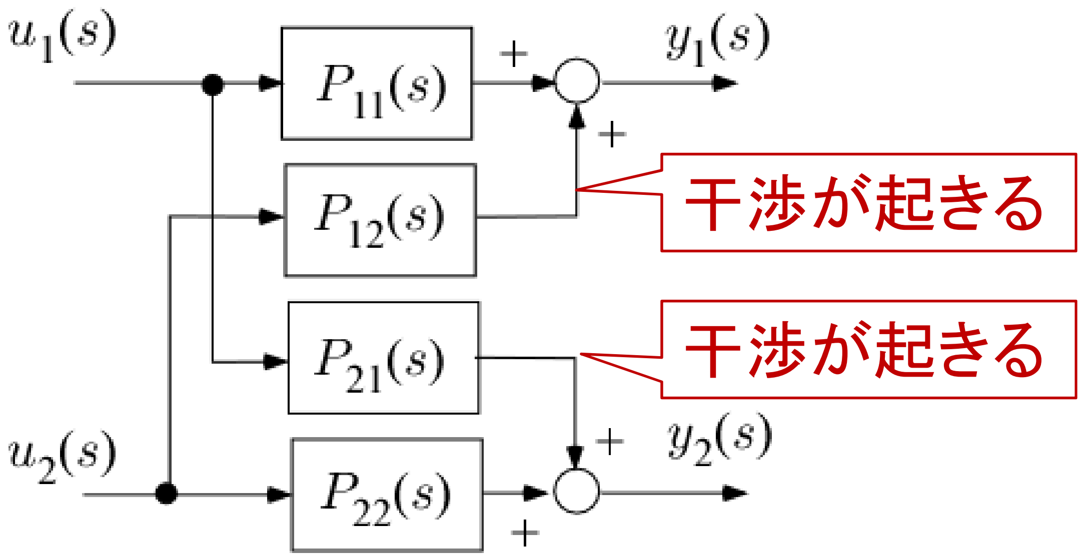
$$\begin{bmatrix} M_1 s^2 + \mu s + k & -(\mu s + k) \\ -(\mu s + k) & M_2 s^2 + \mu s + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix}}_{y(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_1 s^2 + \mu s + k & -(\mu s + k) \\ -(\mu s + k) & M_2 s^2 + \mu s + k \end{bmatrix}^{-1}}_{P(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}}_{u(s)}$$

$$= \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} M_2 s^2 + \mu s + k & (\mu s + k) \\ (\mu s + k) & M_1 s^2 + \mu s + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$



古典制御（P-D制御など）では設計が難しい

1 古典制御理論から現代制御理論へ

1.4 現代制御理論における多入力多出力システムの取り扱い

制御対象

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{状態方程式}$$

$$y(t) = Cx(t) \quad \text{出力方程式}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & \dot{z}_1(t) & z_2(t) & \dot{z}_2(t) \end{bmatrix}^T$$

コントローラ

$$u(t) = Kx(t) + Hy^{\mathrm{ref}}(t)$$

$$y^{\mathrm{ref}}(t) = \begin{bmatrix} y_1^{\mathrm{ref}}(t) \\ y_2^{\mathrm{ref}}(t) \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

多入力多出力を扱うことができる

第 2 章 システムの状態空間表現

2.1 線形システムと非線形システム

2.2 線形システムの状態空間表現

2.3 状態空間表現から伝達関数表現への変換

キーワード： 状態空間表現

学習目標：状態空間表現と伝達関数表現の関係を理解する。

2 システムの状態空間表現

2.1 線形システムと非線形システム

[例 2.1]（線形システム）

$$J\ddot{y}(t) = u(t) - \mu\dot{y}(t)$$

ラプラス変換

$$Jy(s)s^2 = u(s) - \mu y(s)s$$

$$(Js^2 + \mu s)y(s) = u(s)$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Js^2 + \mu s}$$

[例 2.2]（非線形システム）

$$J\ddot{y}(t) = u(t) - Mgl\sin y(t) - \mu\dot{y}(t)$$

伝達関数にできない

2 システムの状態空間表現

2.2 線形システムの状態空間表現

［例 2.3］

$$J\ddot{y}(t) = u(t) - \mu\dot{y}(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{J}u(t) - \frac{\mu}{J}\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{J}u(t)$$

$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = \dot{y}(t)$ を用いて

1行目は $\dot{y}(t) = \dot{y}(t)$を示す

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

2行目は
$\ddot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{J}u(t)$
を示す

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$ とおくと

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

制御量は$x_1(t)$とする

$$\boxed{y(t) = x_1(t)}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

$$\underline{C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}, \quad D = 0$$ とおくと

センサで x_1 が観測可能であることを示す

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

状態空間表現

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

[例 2.4]

$$\begin{cases} M_1\ddot{z}_1(t) = u(t) - k(z_1(t) - z_2(t)) - \mu(\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)) & (1.1a) \\ M_2\ddot{z}_2(t) = \qquad\quad k(z_1(t) - z_2(t)) + \mu(\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)) & (1.1b) \end{cases}$$

$\dot{z}_1(t) = \dot{z}_1(t)$

$\dot{z}_2(t) = \dot{z}_2(t)$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix}}_{=x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & -\frac{\mu}{M_1} & \frac{\mu}{M_1} \\ \frac{k}{M_2} & -\frac{k}{M_2} & \frac{\mu}{M_2} & -\frac{\mu}{M_2} \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix}}_{=x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u(t)$$

$$\ddot{z}_1(t) = \frac{1}{M_1}u(t) - \frac{k}{M_1}z_1(t) + \frac{k}{M_1}z_2(t) - \frac{\mu}{M_1}\dot{z}_1(t) + \frac{\mu}{M_1}\dot{z}_2(t)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{= C} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix}}_{= x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{= D} u(t)$$

$$\boxed{y(t) = z_2(t)}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

[問題 2.1]

次のシステムにおいて，入力 $u(t) = f(t)$，出力 $y(t) = z(t)$，$x(t) = [z(t),\ \dot{z}(t)]^T$ としたとき，状態空間表現(2.7)式を求めよ。

$$M\ddot{z}(t) = f(t) - kz(t) - \mu\dot{z}(t)$$

【解答】

両辺をM で割って

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{M}f(t) - \frac{k}{M}z(t) - \frac{\mu}{M}\dot{z}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{\mu}{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

2 システムの状態空間表現

2.3 状態空間表現から伝達関数表現への変換

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (2)$$

(1) 式をラプラス変換

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$(sI - A)\,x(s) = Bu(s)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1} Bu(s)$$

(2) 式をラプラス変換

$$\begin{aligned} y(s) &= Cx(s) + Du(s) \\ &= C\,(sI - A)^{-1} Bu(s) + Du(s) \\ &= \left\{C\,(sI - A)^{-1} B + D\right\} u(s) \end{aligned}$$

$$y(s) = P(s)u(s), \qquad P(s) = C\,(sI - A)^{-1} B + D$$

$s-A$ ではなく $sI-A$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$s-A=s-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$ 行列の大きさが異なるので計算できない

$$sI-A=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$ 計算可能

$\dfrac{1}{sI-A}$ ではなく $(sI-A)^{-1}$

$$\frac{1}{sI-A}=\frac{1}{s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}}$$ 分母が行列だと計算できない

[例]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

$$(sI - A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \frac{\mu}{J} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s\left(s + \frac{\mu}{J}\right)} \begin{bmatrix} s + \frac{\mu}{J} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

よって

$$P(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s\left(s + \frac{\mu}{J}\right)} \begin{bmatrix} s + \frac{\mu}{J} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s\left(s + \frac{\mu}{J}\right)} \begin{bmatrix} s + \frac{\mu}{J} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \frac{1}{s\left(s + \frac{\mu}{J}\right)} \frac{1}{J}$$

$$= \frac{1}{Js^2 + \mu s}$$

$$P(s) = \frac{1}{Js^2 + \mu s} = \frac{1}{s(Js + \mu)}$$

極 $s = 0, \quad -\dfrac{\mu}{J}$

一方

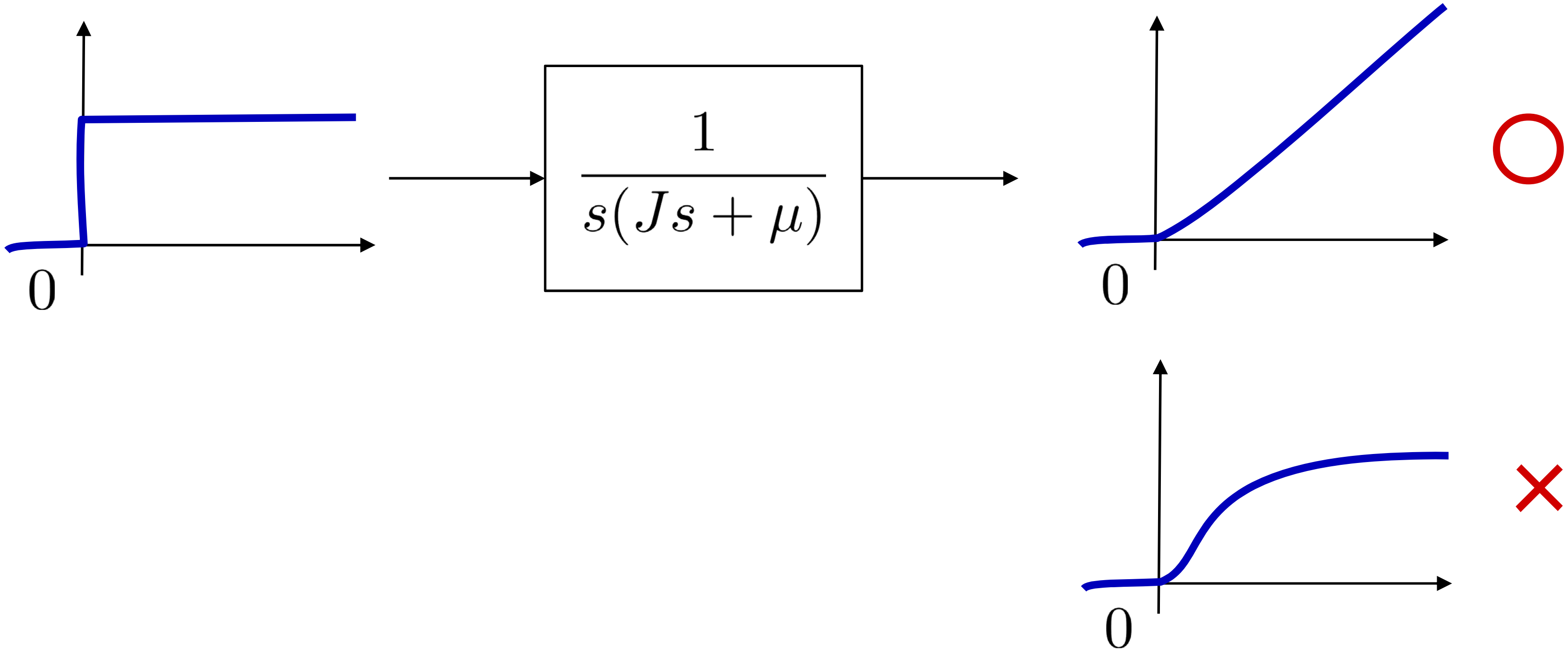
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix},$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \frac{\mu}{J} \end{vmatrix} = s\left(s + \frac{\mu}{J}\right)$$

固有値 $s = 0, \quad -\dfrac{\mu}{J}$

行列 A の固有値($|sI - A| = 0$ の根)は，伝達関数 $P(s)$ の極に等しい

ステップ応答はどちらが正しいですか？



[MATLAB演習]

2.5.1

- ss_P = ss(A, B, C, D)
- [A, B, C, D] = ssdata(ss_P)

2.5.2

- tf_P = tf(ss_P)
- zpk_P = zpk(ss_P)
- [numP, denP] = tfdata(tf_P, ’v’)
- [z, p, k] = zpkdata(zpk_P , ’v’)

[Scilab演習]

2.5.1

- ss_P = syslin(’c’,A, B, C, D)
- [A, B, C, D] = abcd(ss_P)

2.5.2

- tf_P = clean(ss2tf(ss_P));
- zpk_P = zpk(tf_P)
- num = tf_P.num

  den= tf_P.den
- [z, p, k] = tf2zp(tf_P)

[問題 2.5]

(1) 1慣性システムの運動方程式

$$M\ddot{y}(t) + \mu\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)u(t)$$

をラプラス変換することによって，伝達関数 $P(s) = \dfrac{y(s)}{u(s)}$ を求めよ。

(2) (2.40)式を利用し，【問題2.1】で求めた状態空間表現から伝達関数 $P(s)$ を求めよ。

第 2 章 システムの状態空間表現

2.1 線形システムと非線形システム

2.2 線形システムの状態空間表現

2.3 状態空間表現から伝達関数表現への変換

キーワード： 状態空間表現

学習目標：状態空間表現と伝達関数表現の関係を理解する。