第 2 章 システムの状態空間表現

2.4 伝達関数表現から状態空間表現への変換

キーワード： 状態空間表現

学習目標：状態空間表現と伝達関数表現の関係を理解する。

2 システムの状態空間表現

2.4 伝達関数表現から状態空間表現への変換

$$P(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{1}{Js^2+\mu s}$$

$$\left(Js^2+\mu s\right)y(s)=u(s)$$

$$J\ddot{y}(t)=u(t)-\mu\dot{y}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}y(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\frac{\mu}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{J}\end{bmatrix}u(t)$$

状態を変えると

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}y(t)\\ y(t)+\dot{y}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -\left(1-\frac{\mu}{J}\right) & \left(1-\frac{\mu}{J}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(t)\\ y(t)+\dot{y}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{J}\end{bmatrix}u(t)$$

システムの状態は唯一でないため，状態空間表現は無数に存在

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -\left(1-\frac{\mu}{J}\right) & \left(1-\frac{\mu}{J}\right)\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}|sI-A|&=\begin{vmatrix}s+1 & -1\\ \left(1-\frac{\mu}{J}\right) & s-\left(1-\frac{\mu}{J}\right)\end{vmatrix}\\
&=(s+1)\left(s-\left(1-\frac{\mu}{J}\right)\right)+\left(1-\frac{\mu}{J}\right)\\
&=s\left(s-\left(1-\frac{\mu}{J}\right)\right)+\left(s-\left(1-\frac{\mu}{J}\right)\right)+\left(1-\frac{\mu}{J}\right)\\
&=s\left(s-\left(1-\frac{\mu}{J}\right)\right)+s\\
&=s\left(s+\frac{\mu}{J}\right)\end{aligned}$$

固有値 $s=0,\ -\frac{\mu}{J}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}y(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\frac{\mu}{J}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}y(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{J}\end{bmatrix}u(t)$$

固有値 $s=0,\ -\frac{\mu}{J}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}y(t)\\ y(t)+\dot{y}(t)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -\left(1-\frac{\mu}{J}\right) & \left(1-\frac{\mu}{J}\right)\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}y(t)\\ y(t)+\dot{y}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{J}\end{bmatrix}u(t)$$

固有値 $s=0,\ -\frac{\mu}{J}$

固有値は，どのように状態を選んでも変わらない

可制御標準形への変換

真にプロパーな規約な n 次の伝達関数表現

$$P(s)=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}u(s)$$

は，可制御標準形と呼ばれる以下の n 次の状態空間表現に変換できる。

$$\dot{x}_c(t)=A_c x_c(t)+B_c u(t)$$
$$y(t)=C_c x_c(t)$$

$$x_c(t)=\begin{bmatrix}x_{c1}(t)\\ x_{c2}(t)\\ x_{c3}(t)\\ \vdots\\ x_{cn}(t)\end{bmatrix},\ A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix},\ B_c=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C_c=\begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

可観測標準形

$$\dot{x}_o(t)=A_o x_o(t)+B_o u(t)$$
$$y(t)=C_o x_o(t)$$

$$A_o=A_c^T$$
$$B_o=C_c^T$$
$$C_o=B_c^T$$

【例】問題2.6(2)

$$P(s)=\frac{4(s+2)}{s^3+3s^2+4s+2}$$

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix},\ B_c=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C_c=\begin{bmatrix}8 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix},\ B_o=\begin{bmatrix}8\\ 4\\ 0\end{bmatrix}$$

$$C_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P(s)=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}u(s)$$

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix},\ B_c=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C_c=\begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

[問題 2.6(1)]

伝達関数 $P(s)$ が与えられたとき，可制御標準形 $A_c,\ B_c,\ C_c$，可観測標準形 $A_o,\ B_o,\ C_o$ を求めよ。

$$P(s) = \frac{1}{s^2+2s+3}$$

7

最小実現

$$y(t) = x_2(t) = \dot{z}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t) \qquad \text{2次}$$

$$y(t) = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

$[1\quad 0]$ でない

伝達関数を求める

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s\left(s+\frac{\mu}{J}\right)}\begin{bmatrix} s+\frac{\mu}{J} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \frac{1}{s\left(s+\frac{\mu}{J}\right)}\begin{bmatrix} 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{Js+\mu} \qquad \text{1次}$$

8

状態空間表現を求める

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Js+\mu} \qquad (Js+\mu)y(s) = u(s)$$

$$J\dot{y}(t) + \mu y(t) = u(t)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\mu}{J}y(t) + \frac{1}{J}u(t)$$

状態空間表現は次のようになる

$$\dot{x}(t) = \frac{\mu}{J}x(t) + \frac{1}{J}u(t) \qquad \text{1次}$$

$$y(t) = x(t)$$

同じシステム

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t) \qquad \text{2次}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

状態空間表現は2次だが，伝達関数は1次のため，最小実現でない 9

行列の大きさ

$$1\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\overset{3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} * & * & * \end{bmatrix} \qquad \text{1行3列}$$

$$1\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\overset{1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} = * \qquad \text{1行1列}$$

10

[MATLAB演習]

2.5.3

- [A, B, C, D] = tf2ss(num, den)
- Ss_Pb = ss2ss(ss_P, T)

2.5.4

- Ss_P_min = ss(ss_P, 'min')

[Scilab演習]

- s=poly(0,'s')
  H = (4*s+8)/(s^3+3*s^2+4*s+2)
  ss_P = tf2ss(H);
  変換ミスが多い
- ss_Pb = ss2ss(ss_P, T)
- ss_P = syslin('c',A,B,C,D)
  Ss_P_min = minss(ss_P)

11

[問題 2.7(2)]

1入出力システムの状態空間表現

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

における c が以下のように与えられたとき，伝達関数 $P(s)$ を求めることで，最小実現であるかどうかを判別せよ。

$$c = [1\ 1]$$

12

第 2 章 システムの状態空間表現

2.4 伝達関数表現から状態空間表現への変換

キーワード： 状態空間表現

学習目標：状態空間表現と伝達関数表現の関係を理解する。

13