2021 年 12 月 13 日
河合康典

2021 年度 電気回路 II 後期 中間試験 (模範解答)
2021 年 12 月 13 日 2 限 (11:10-12:30)

注意：途中計算が解答欄に記入されていない場合は減点とする。

[問題 1] (配点 30 点 ((1),(2):9 点,(3),(4):6 点))
*学生の到達目標 (5)

図 1-1 の RC 回路のスイッチ S を，時刻 $t=0$ の瞬間に (B) から (A) に倒したとき，以下の問いに答えよ。

(1) $t>0$ のときの $v(t)$ に関する微分方程式を求めよ。

(2) 変数分離法により，微分方程式の $v(t)$ に関する一般解を求めよ。

(3) 一般解に初期条件を適用して，<u>電圧 $v(t)$</u> と，<u>電流 $i(t)$</u> を求めよ。

(4) <u>電圧 $v(t)$</u> と，<u>電流 $i(t)$</u> の概形を描け。

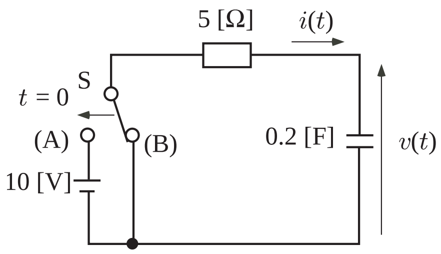

図 1-1: 回路

[解答]

(1) $t>0$ のとき回路は,

$$10 = 5i(t) + \frac{1}{0.2}\int i(t)\ \ dt \tag{1-1}$$

$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 0.2\frac{dv(t)}{dt}$ より，両辺を微分すると

$$\underline{10 = \frac{dv(t)}{dt} + v(t)} \tag{1-2}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{dv(t)}{dt} &= 10 - v(t) \\
\int \frac{1}{10 - v(t)} dv(t) &= \int 1\ dt \\
-\ln(10 - v(t)) &= t + K_1 \\
10 - v(t) &= e^{-t-K_1} \\
v(t) &= \underline{10 - Ke^{-t}} \qquad (1\text{-}3)
\end{aligned}$$

となる。ここで，K_1 は積分定数で $K = e^{-K_1}$ である。

(3) 初期値電圧 $v(0)=0$ より

$$v(0) = 10 - K = 0 \tag{1-4}$$

より

$$K = 10 \tag{1-5}$$

である。よって，電圧は

$$v(t) = \underline{10 - 10e^{-t}\ [\mathrm{V}]} \tag{1-6}$$

電流は

$$\begin{aligned}
i(t) &= 0.2\frac{dv(t)}{dt} = 0.2 \times 10e^{-t} && (1\text{-}7) \\
&= \underline{2e^{-t}\ [\mathrm{A}]} && (1\text{-}8)
\end{aligned}$$

(4) 図 1-2，1-3 となる。

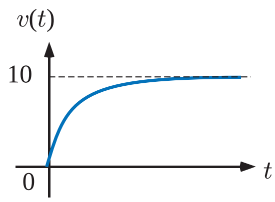

図 1-2: 電圧の波形

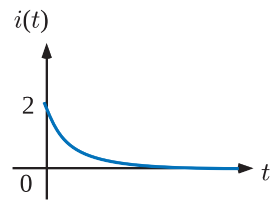

図 1-3: 電流の波形

[問題 2] (配点 20 点) *学生の到達目標 (6)

図 2-1 の回路のスイッチを時刻 $t = 0$ に開いたとき，ラプラス変換 (または s 回路法) を用いて 電流 $i(t)$ を求めよ。

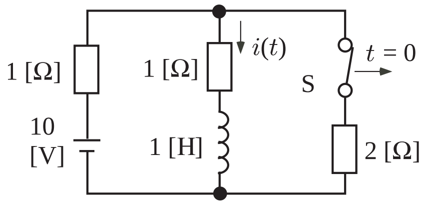

図 2-1: 回路

[解答]

初期電流は，分流より

$$i(0) = \frac{10}{1+\frac{1\times2}{1+2}}\frac{2}{1+2} = \frac{10}{1+\frac{2}{3}}\frac{2}{3} = \frac{20}{3+2} = 4 \tag{2-1}$$

となる。回路は

$$(1+1)i(t) + 1 \times \frac{di(t)}{dt} = 10 \tag{2-2}$$

となるので，ラプラス変換すると

$$\begin{aligned} 2I(s) + (sI(s) - i(0)) &= \frac{10}{s} \\ 2I(s) + (sI(s) - 4) &= \frac{10}{s} \\ (s+2)I(s) &= \frac{10}{s} + 4 \\ (s+2)I(s) &= \frac{10+4s}{s} \\ I(s) &= \frac{10+4s}{s(s+2)} \end{aligned} \tag{2-3}$$

$$I(s) = \frac{5}{s} - \frac{1}{s+2} \tag{2-4}$$

逆ラプラス変換すると

$$i(t) = \underline{5 - e^{-2t}} \tag{2-5}$$

となる。

[問題 3] (配点 25 点 ((1),(3),(4):5 点,(2):10 点))*学生の到達目標 (5),(6)

図 3-1 の回路のスイッチを，時刻 $t = 0$ の瞬間に開いた。このとき，以下の問いに答えよ。解き方は指定しない。

(1) $t < 0$ のときの電流 $i(t)$ を求めよ。

(2) $t > 0$ のときの電流 $i(t)$ を求めよ。

(3) $t > 0$ のときの電圧 $v(t)$ を求めよ。

(4) 時定数 τ を求めよ。

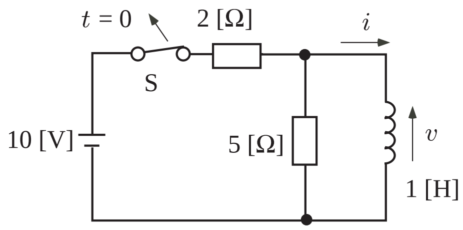

図 3-1: 回路

[解答]

(1) 直流で L のインピーダンスは 0 なので

$$i = \frac{10}{2} = \underline{5\ \ [\mathrm{A}]} \tag{3-1}$$

(2) $t > 0$ のとき回路は,

$$0 = 5i(t) + \frac{di(t)}{dt} \tag{3-2}$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= -5i(t) \\ \int \frac{1}{i(t)}di(t) &= \int -5\ dt \\ \ln i(t) &= -5t + K_1 \\ i(t) &= e^{-5t+K_1} \\ i(t) &= Ke^{-5t} \end{aligned} \tag{3-3}$$

となる。ここで，$K = e^{K_1}$ である。初期電流 $i(0) = 5$ より

$$i(0) = K = 5 \tag{3-4}$$

となる。よって,

$$i(t) = \underline{5e^{-5t}\ \ [\mathrm{A}]} \tag{3-5}$$

である。

(3) 電圧は

$$1\frac{di(t)}{dt} = \underline{-25e^{-5t} \ \ [\mathrm{V}]} \tag{3-6}$$

となる。

(4) 時定数は

$$\tau = \frac{1}{5} = \underline{0.2} \tag{3-7}$$

[**問題 4**] (配点 20 点) *学生の到達目標 (5),(6)

図 4-1 の回路で，$t = 0$ にスイッチ S を (A) から (B) に倒したとき，電流 $i(t)$ を求めよ。解き方は指定しない。

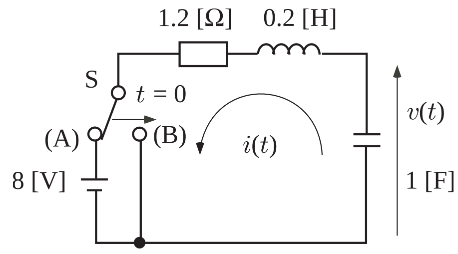

図 4-1: 回路

[**解答**]

$t > 0$ のとき回路は,

$$v(t) = 0.2\frac{di(t)}{dt} + 1.2i(t) \tag{4-1}$$

となる。$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{dv(t)}{dt}$ の関係を用いると

$$0 = 0.2\frac{d^2v}{dt} + 1.2\frac{dv}{dt} + v \tag{4-2}$$

と変形できる。特性方程式は

$$\begin{aligned} 0.2p^2 + 1.2p + 1 &= 0 \\ p^2 + 6p + 5 &= 0 \end{aligned} \tag{4-3}$$

より

$$(p+1)(p+5) = 0 \tag{4-4}$$

から

$$p = -1, -5 \tag{4-5}$$

となる。よって，電圧 $v(t)$ は

$$v(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{-5t} \tag{4-6}$$

となる。また，電流 $i(t)$ は

$$\begin{aligned} i(t) &= -\frac{dv(t)}{dt} \\ &= -(-K_1e^{-t} - 5K_2e^{-5t}) \\ &= K_1e^{-t} + 5K_2e^{-5t} \end{aligned} \tag{4-7}$$

となる。初期条件

$$v(0) = 8, \ i(0) = 0 \tag{4-8}$$

を (4-6) 式，(4-7) 式に代入して,

$$8 = K_1 + K_2 \tag{4-9}$$

$$0 = K_1 + 5K_2 \tag{4-10}$$

から，(4-9) 式 −(4-10) 式より

$$\begin{aligned} 8 &= -4K_2 \\ K_2 &= -2 \end{aligned} \tag{4-11}$$

(4-10) 式に代入

$$
\begin{aligned}
0 &= K_1 - 10 \\
K_1 &= 10 \qquad (4\text{-}12)
\end{aligned}
$$

となる。よって,

$$v(t) = 10e^{-t} - 2e^{-5t} \quad [\mathrm{V}] \qquad (4\text{-}13)$$

となる。よって,

$$
\begin{aligned}
i(t) &= -\frac{dv(t)}{dt} = -(-10e^{-t} + 10e^{-5t}) \\
&= \underline{10(e^{-t} - e^{-5t}) \quad [\mathrm{A}]} \qquad (4\text{-}14)
\end{aligned}
$$

[問題 5] (配点 5 点)*学生の到達目標 (6)

図 5-1 のラプラス変換 $V(s)$ を求めよ。ただし, $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = F(s)e^{-as}$ を使いてよい。

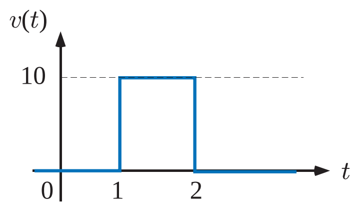

図 5-1: 波形

[解答]

$t = 1$ で大きさ 10 のステップ信号と $t = 2$ で大きさ -10 のステップ信号の組み合わせから求まるので

$$v(t) = 10u(t-1) - 10u(t-2) \qquad (5\text{-}1)$$

となる。ラプラス変換すると

$$V(s) = \underline{\frac{10}{s}e^{-s} - \frac{10}{s}e^{-2s}} \qquad (5\text{-}2)$$

となる。