第 4 章：過渡現象

4.4　過渡現象の解法

キーワード：RL直列回路, RC直列回路

学習目標：RL回路とRC回路の過渡現象を解くことができるようになる。

定常現象

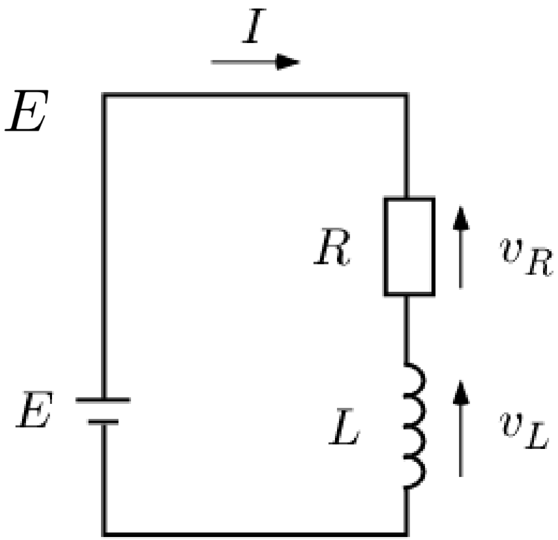
直流

$$RI + j\underline{\omega}LI = E$$

$$\omega = 0$$

$$RI = E$$

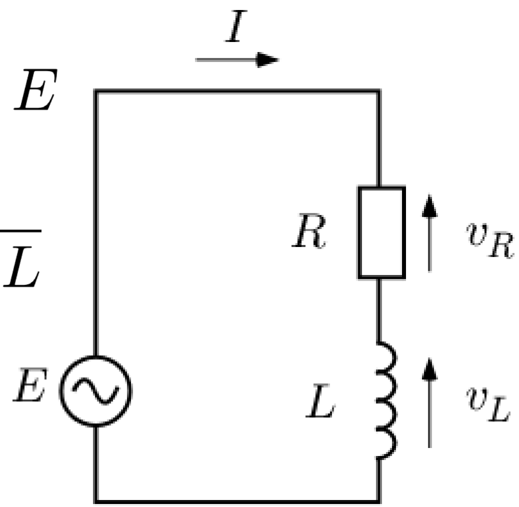
$$I = \frac{E}{R}$$



交流

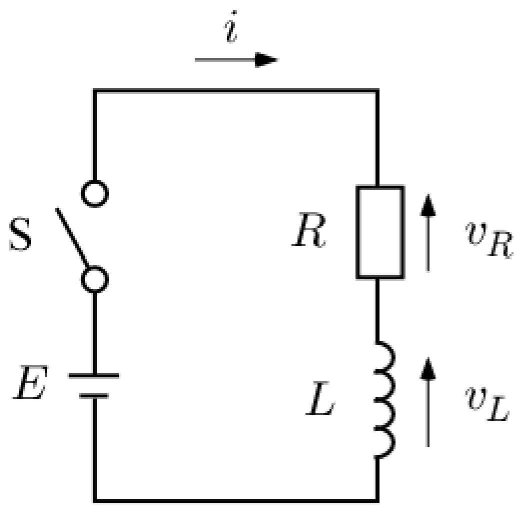
$$RI + j\omega LI = E$$

$$I = \frac{E}{R + j\omega L}$$



過渡現象

電源(スイッチ)を入れた瞬間の現象



過渡現象の解き方

[解法1]

微分方程式を解いて，積分定数を求める。

[解法2]

微分値 = 0　電源 = 0

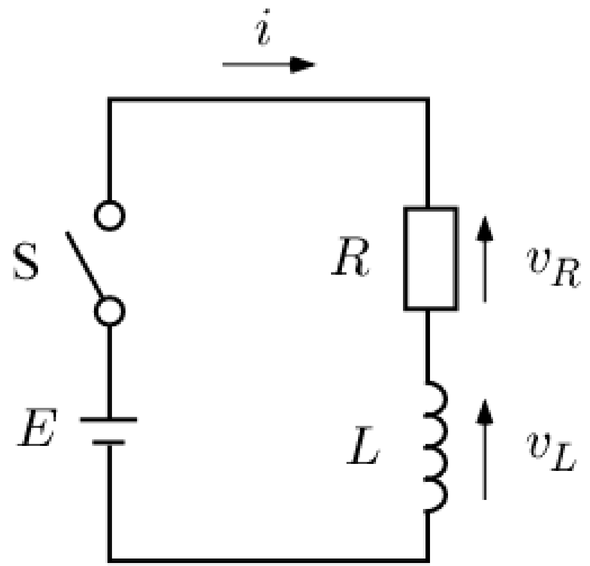
定常解と過渡解に分けてとき，合わせる。そして，積分定数を求める。

4 過渡現象

4.4.1 RL直列回路

［問題1］

［解法1］



$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

を用いて

$$L\frac{di}{dt} = E - Ri$$

$$\frac{di}{E - Ri} = \frac{dt}{L}$$

$$\int \frac{di}{E - Ri} = \int \frac{1}{L}dt$$

$$\int \frac{di}{Ri - E} = -\int \frac{1}{L}dt$$

$$\frac{1}{R}\ln(Ri - E) = -\frac{t}{L} + C_1$$

$$\ln(Ri - E) = -\frac{R}{L}t + RC_1$$

$$Ri - E = e^{-\frac{R}{L}t + RC_1}$$

$$Ri - E = Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad (A = e^{RC_1})$$

$$Ri - E = Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad (1)$$

初期条件 $t = 0,\ i = 0$ より

$$R \times 0 - E = Ae^{-\frac{R}{L}\times 0}$$

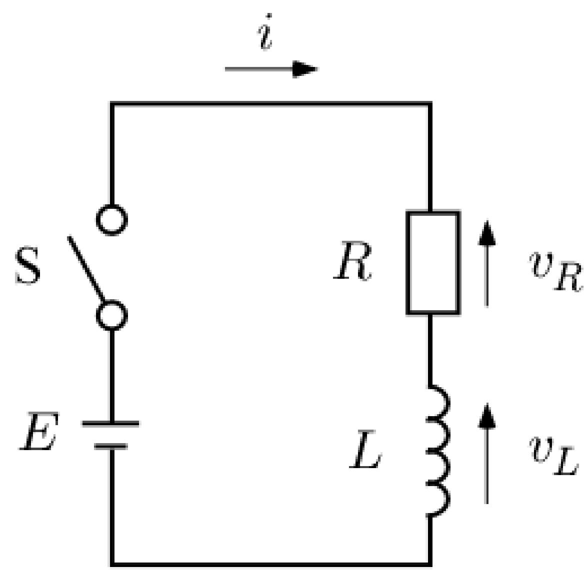
$$-E = A$$

(1)式に代入

$$Ri - E = -Ee^{-\frac{R}{L}t}$$

$$Ri = E - Ee^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



抵抗の電圧

$$e_R = Ri = R \times \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = E\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

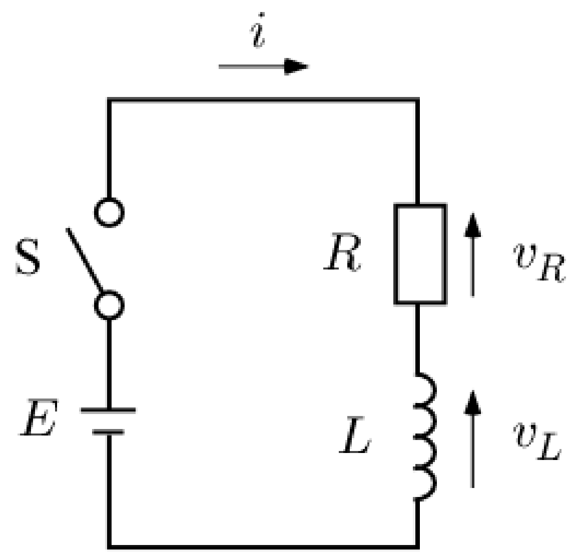
コイルの電圧

$$e_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{LE}{R}\left(\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right) = Ee^{-\frac{R}{L}t}$$

[解法2]

定常解

$$\underbrace{L\frac{di_s}{dt}}_{=0} + Ri_s = E \quad \Rightarrow \quad i_s = \frac{E}{R}$$



過渡解

電源 $= 0$

$$L\frac{di_t}{dt} + Ri_t = 0$$

$$\frac{di_t}{dt} = -\frac{R}{L}i_t$$

$$\int \frac{di_t}{i_t} = -\int \frac{R}{L}dt$$

$$\ln|i_t| = -\frac{R}{L}t + C$$

$$\begin{aligned} i_t &= e^{-\frac{R}{L}t+C} \\ &= \pm e^C e^{-\frac{R}{L}t} \\ &= Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad (A = \pm e^C) \end{aligned}$$

よって $\quad i = i_s + i_t = \dfrac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$

$$i = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

初期条件

$t = 0, \quad i = 0$ を代入

$$0 = \frac{E}{R} + A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{E}{R}$$

よって

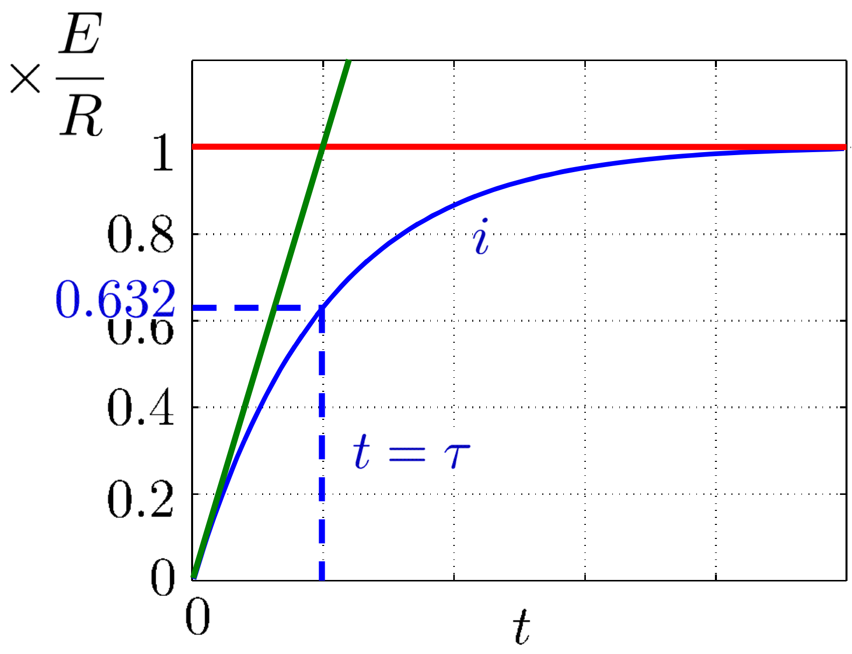
$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

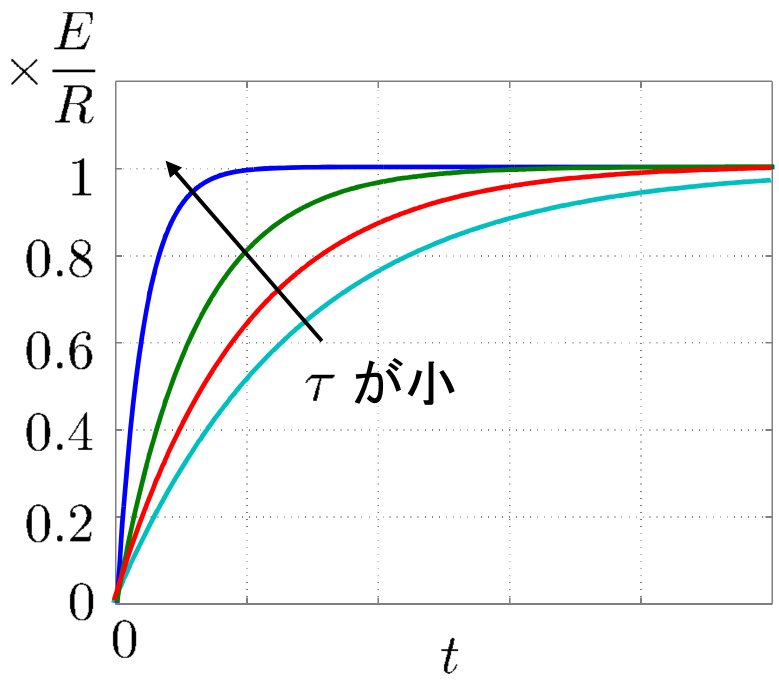
時定数

過渡状態の時間の長さを表す

$$\tau = \frac{L}{R}$$

時刻 $t = \tau$ において定常値の 63.2 % になる.



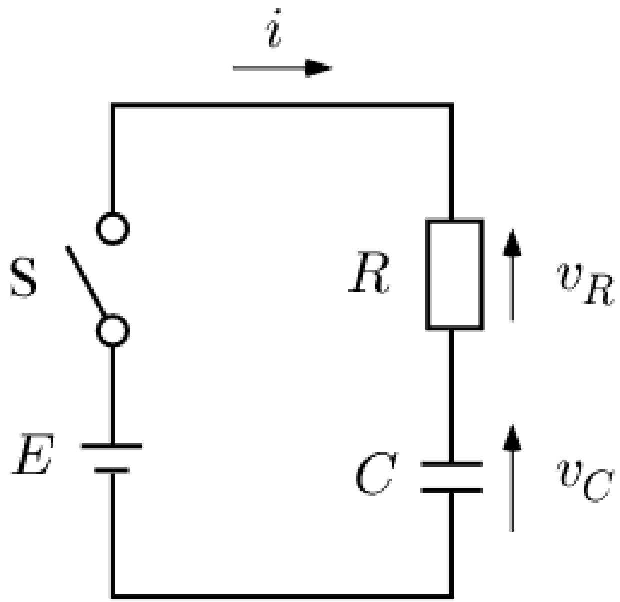


4 過渡現象

4.4.2 RC直列回路

［問題23］

$$Ri + \frac{1}{C}\int i \quad dt = E$$



［解法1］

$$Ri + \frac{1}{C}\int i \, dt = E$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$ の関係を用いると

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

$$R\frac{dq}{dt} = E - \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{E - \frac{q}{C}} = \frac{dt}{R}$$

積分すると

$$\int \frac{dq}{E - \frac{q}{C}} = \int \frac{1}{R} dt$$

$$-C \ln\left(E - \frac{q}{C}\right) = \frac{1}{R} t + K$$

$$\ln\left(E - \frac{q}{C}\right) = -\frac{1}{CR} t - \frac{K}{C}$$

$$E - \frac{q}{C} = e^{-\frac{1}{CR} t - \frac{K}{C}}$$

$$\frac{q}{C} = E - e^{-\frac{1}{CR} t - \frac{K}{C}}$$

$$q = CE - Ce^{-\frac{1}{CR} t - \frac{K}{C}}$$

$A = e^{-\frac{K}{C}}$ とおくと

$$q = CE - ACe^{-\frac{1}{CR} t} \qquad (1\text{-}1)$$

初期条件

$t = 0,\quad q = 0$ を(1-1)式に代入すると

$$0 = CE - ACe^{0}$$

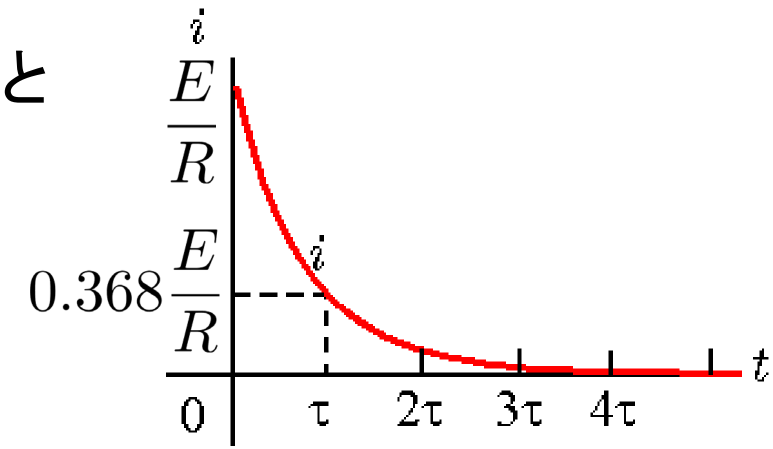
$$A = E$$

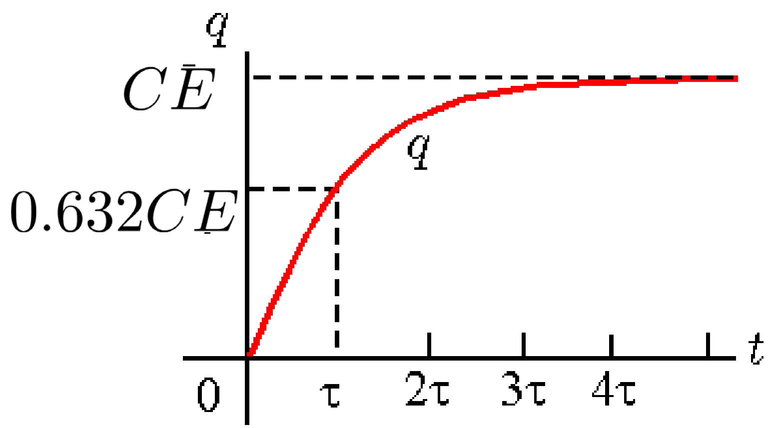
よって, (1-1)式に代入すると

$$q = CE - CEe^{-\frac{1}{CR}t}$$

$$= CE\left(1 - e^{-\frac{1}{CR}t}\right)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$$



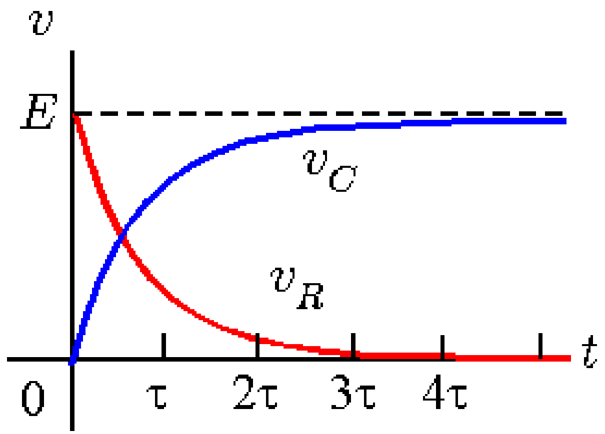


各素子の電圧

$$v_R = Ri = Ee^{-\frac{t}{CR}}$$

$$v_C = R - v_R = E - Ee^{-\frac{t}{CR}}$$

$$= E\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$



[解法2]

$$Ri + \frac{1}{C}\int idt = E$$

$i = \dfrac{dq}{dt}$ の関係を用いると

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

定常解

$$\underbrace{R\frac{dq_s}{dt}}_{=0} + \frac{q_s}{C} = E \quad \Rightarrow \quad q_s = CE$$

過渡解

$$R\frac{dq_t}{dt} + \frac{q_t}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_t = Ae^{-\frac{1}{CR}t}$$

よって

$$q = q_s + q_t = CE + Ae^{-\frac{1}{CR}t}$$

$$q = CE + Ae^{-\frac{1}{CR}t}$$

初期条件

$t = 0,\ q = 0$ を代入

$$0 = CE + A \quad \Rightarrow \quad A = -CE$$

よって

$$q = CE - CEe^{-\frac{1}{CR}t}$$

$$= CE\left(1 - e^{-\frac{1}{CR}t}\right)$$

これらから

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$$

[解法3]

$$Ri + \frac{1}{C}\int i \quad dt = E$$

微分すると

$$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

$$\frac{1}{i}di = -\frac{1}{CR}dt$$

$$\int \frac{1}{i}di = -\frac{1}{CR}\int dt$$

$$\ln|i| = -\frac{1}{CR}t + K$$

$$i = e^{-\frac{t}{CR}+K}$$

$A = e^K$ とおくと

$$i = Ae^{-\frac{t}{CR}}$$

初期条件

$t = 0,\quad i = \dfrac{E}{R}$ を代入すると $A = \dfrac{E}{R}$

よって

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{CR}}$$

[ドリル 問題38.2]

コンデンサに充電されていない限り，初期値は 0

[ドリル 問題38.4]

ドリルの模範解答は $q \to Cv$ としている

第 4 章：過渡現象

4.4　過渡現象の解法

キーワード： *RL*直列回路, *RC*直列回路

学習目標：*RL*回路と*RC*回路の過渡現象を解くことができるようになる。