第 4 章：過渡現象

4.4　過渡現象の解法

キーワード：RL直列回路, RC直列回路

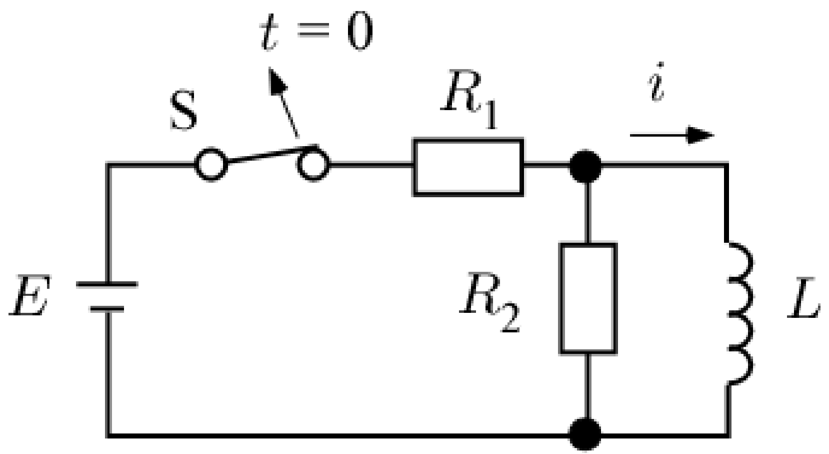
学習目標：RL回路とRC回路の過渡現象を解くことができるようになる。

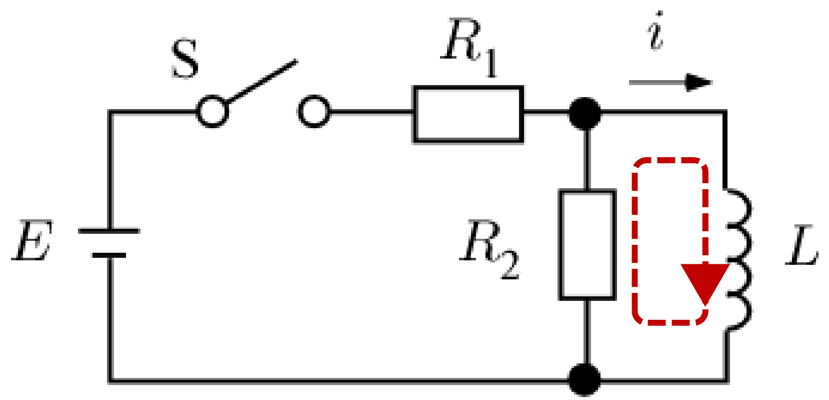
4 過渡現象

4.4.3 RL直列回路(電源除去)

[問題5]

スイッチS を開くと





$$L\frac{di}{dt}+R_2 i(t)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{di}{dt}=-\frac{R_2}{L}i(t)$$

$$\int \frac{di}{i}=-\int \frac{R_2}{L}dt$$

$$\ln|i|=-\frac{R_2}{L}t+K$$

$$i=e^{-\frac{R_2}{L}t+K}$$

$$=e^{K}e^{-\frac{R_2}{L}t}$$

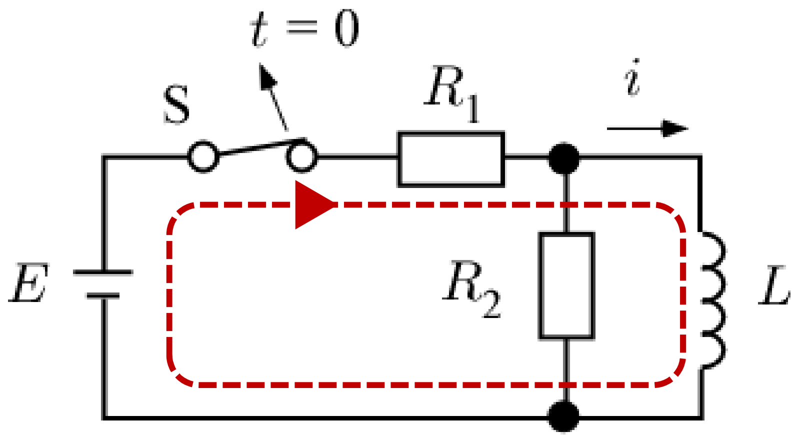
$$=Ae^{-\frac{R_2}{L}t} \qquad (1) \qquad\qquad (A=e^{K})$$

コイルのインピーダンス $Z_L = j\omega L$

$t = 0-$ のとき，定常状態とすると

$\omega = 0$（電圧は一定値）より $Z_L = 0$

R_2 に電流は流れない

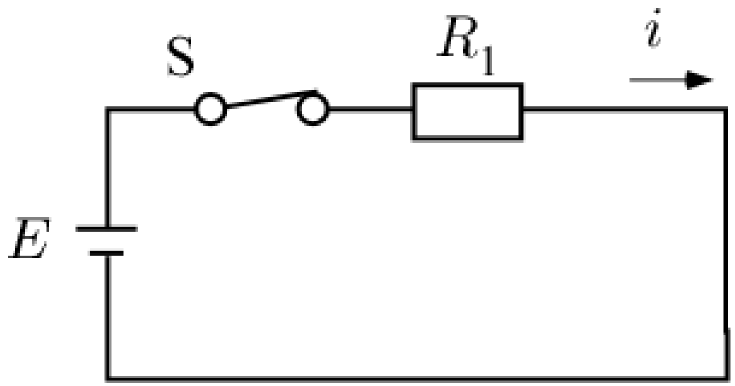


$t = 0$ のとき，抵抗 R_1だけの回路

初期条件　$t = 0,\ \ i(0) = \dfrac{E}{R_1}$

を(1)式に代入

$$i(0) = Ae^0 = \frac{E}{R_1} \ \Rightarrow\ A = \frac{E}{R_1}$$

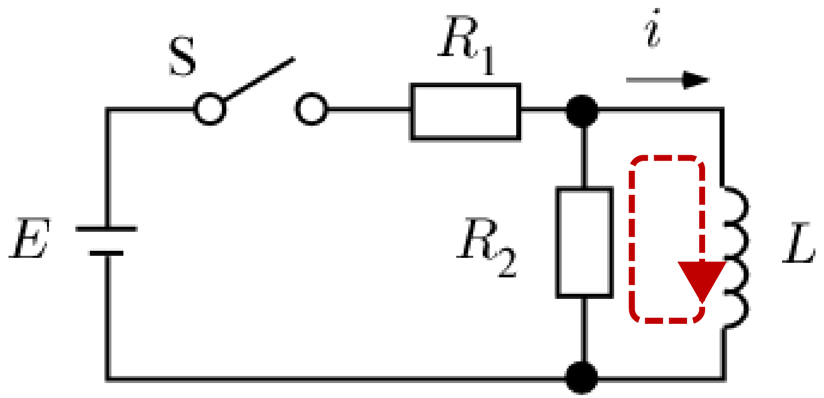


電流

$$i(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L}t}$$

$$i(t) = Ae^{-\frac{R_2}{L}t} \quad (1)$$

抵抗 R_2で消費される電力



$$P_a = i^2 R_2 = \left(\frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L}t} \right)^2 R_2$$

$$= \frac{R_2 E^2}{R_1^2} e^{-\frac{2R_2}{L}t}$$

$$i(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L}t}$$

電力量（エネルギー）

$$W = \int_0^\infty P_a \, dt = \int_0^\infty \frac{R_2 E^2}{R_1^2} e^{-\frac{2R_2}{L}t} \, dt$$

$$= \frac{R_2 E^2}{R_1^2} \left[\left(-\frac{L}{2R_2} \right) e^{-\frac{2R_2}{L}t} \right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{2} L \frac{E^2}{R_1^2} (0 - 1) = \frac{1}{2} L \underbrace{\frac{E^2}{R_1^2}}_{i(0)^2}$$

4 過渡現象

4.4.4 RC直列回路（放電）

［問題34］

スイッチS_1 :閉じる，スイッチS_2 :開く

$$Ri + \frac{1}{C}\int i \ \ dt = E$$

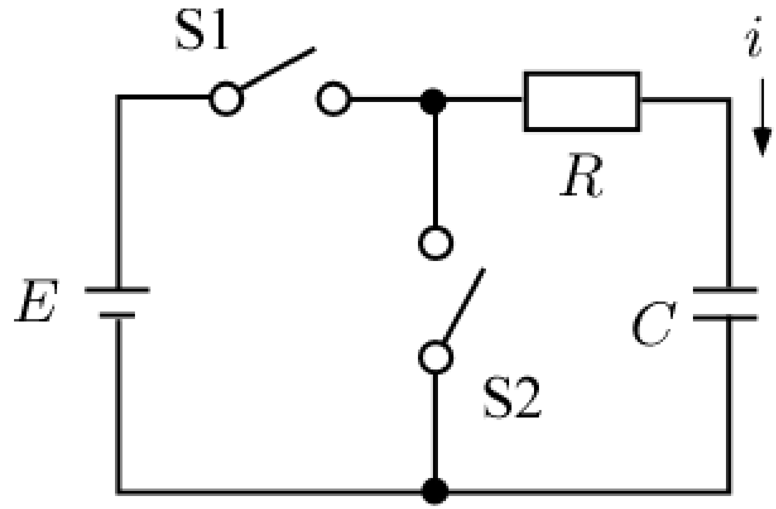
$$q(t) = CE - CEe^{-\frac{1}{CR}t}$$

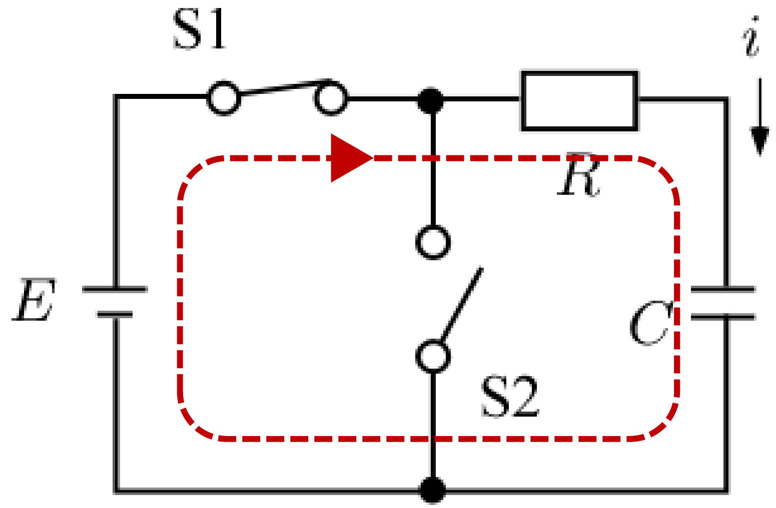
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$$

$t = T$ の電荷

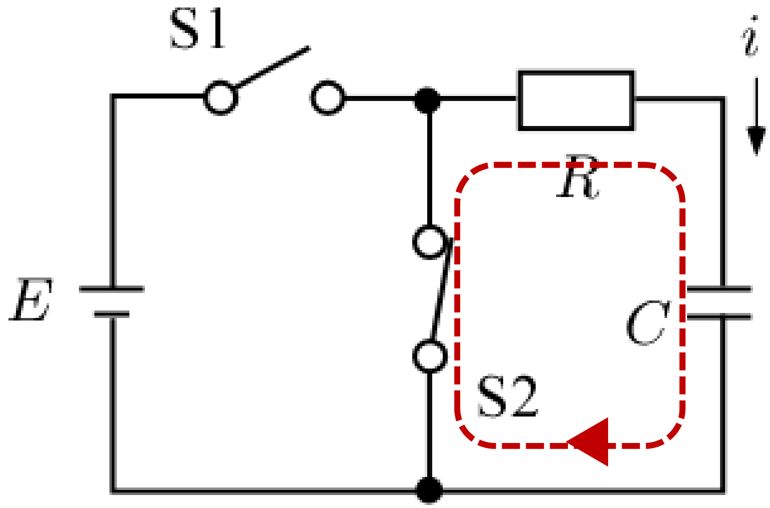
$$q(T) = CE - CEe^{-\frac{1}{CR}T} \qquad (2.1)$$

$$= CE\left(1 - e^{-\frac{1}{CR}T}\right)$$





スイッチS_1 :開く, スイッチS_2 :閉じる



$$Ri + \frac{1}{C}\int i dt = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$ の関係を用いると

$$R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int \frac{dq}{q} = \int -\frac{dt}{RC}$$

$$\ln q = -\frac{1}{RC}t + K$$

$$q(t) = e^{-\frac{1}{RC}t+K}$$

$$= Ae^{-\frac{1}{RC}t} \quad (2.2)$$

$$q(T) = CE - CEe^{-\frac{1}{CR}T} \quad (2.1)$$

$$q(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} \quad (2.2)$$

初期条件 (2.1)式より

$$q(T) = CE - CEe^{-\frac{1}{CR}T} \quad (2.1)$$

(2.2)式において $t = T$

$$q(T) = Ae^{-\frac{1}{RC}T} \quad (2.3)$$

(2.1)式と(2.3)式は等しいので

$$Ae^{-\frac{1}{RC}T} = CE - CEe^{-\frac{1}{CR}T}$$

$$A = CEe^{\frac{1}{CR}T} - CE \quad (2.4)$$

(2.4)式を(2.2)式に代入

$$q = \left(CEe^{\frac{1}{CR}T} - CE\right)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$= CE\left(e^{-\frac{1}{CR}(t-T)} - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

[ドリル 問題40.1]

[ドリル 問題40.2]

第 4 章：過渡現象

4.4　過渡現象の解法

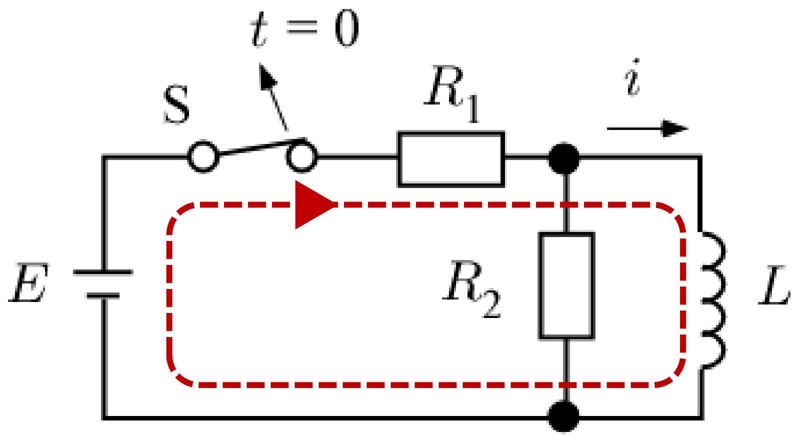
キーワード：RL直列回路, RC直列回路

学習目標：RL回路とRC回路の過渡現象を解くことができるようになる。

【補足】

$$L\frac{di}{dt}+R_1(i+i_R)=E \qquad \text{(A.1)}$$

$$i_R=\frac{E-R_1(i+i_R)}{R_2} \qquad \text{(A.2)}$$



(A.3)式を(A.1)式へ代入

$$L\frac{di}{dt}+R_1\left(i+\frac{E-R_1 i}{R_1+R_2}\right)=E$$

$$L\frac{di}{dt}+R_1\frac{E+R_2 i}{R_1+R_2}=E$$

$$L\frac{di}{dt}+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i=E-\frac{R_1E}{R_1+R_2}$$

$$L\frac{di}{dt}+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i=\frac{R_2}{R_1+R_2}E$$

(A.2)式の展開

$$i_RR_2=E-R_1(i+i_R)$$

$$i_R(R_1+R_2)=E-R_1 i$$

$$i_R=\frac{E-R_1 i}{R_1+R_2} \qquad \text{(A.3)}$$

$$L\frac{di}{dt} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

$$L\frac{di}{dt} = \frac{1}{R_1 + R_2}(R_2 E - R_1 R_2 i)$$

$$(R_1 + R_2) \int \frac{di}{R_2 E - R_1 R_2 i} = \int \frac{1}{L} dt$$

$$(R_1 + R_2) \int \frac{di}{R_1 R_2 i - R_2 E} = - \int \frac{1}{L} dt$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \ln |R_1 R_2 i - R_2 E| = -\frac{1}{L} t + K$$

$$R_1 R_2 i - R_2 E = e^{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\left(-\frac{1}{L} t + K\right)}$$

$$R_1 R_2 i - R_2 E = A e^{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\left(-\frac{1}{L} t\right)} \qquad \text{(A.4)}$$

初期条件 $t = 0,\ i = 0$ より

$$R_1 R_2 i - R_2 E = A e^{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\left(-\frac{1}{L} t\right)} \qquad \text{(A.4)}$$

$$-R_2 E = A \qquad \text{(A.5)}$$

(A.5)式を(A.4)式へ代入

$$R_1 R_2 i - R_2 E = -R_2 E e^{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\left(-\frac{1}{L} t\right)}$$

$$R_1 R_2 i = R_2 E \left(1 - e^{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\left(-\frac{1}{L} t\right)}\right)$$

$$i = \frac{1}{R_1} E \left(1 - e^{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\left(-\frac{1}{L} t\right)}\right)$$

$t \to \infty$ のとき

$$i = \frac{1}{R_1} E$$