

第5章：ラプラス変換とその応用

- 5.1 定義
- 5.2 ラプラス変換の諸性質
- 5.3 ラプラス逆変換
- 5.4 微分方程式の解

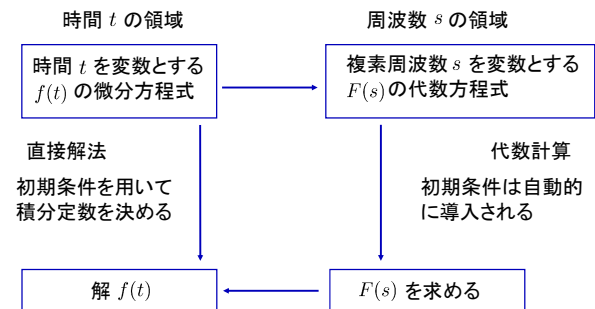
キーワード：ラプラス変換

学習目標：ラプラス変換を理解する。

1

5 ラプラス変換とその応用

5.1 定義



2

5 ラプラス変換とその応用

5.2 ラプラス変換の諸性質

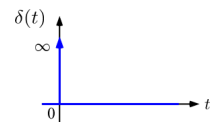
時間関数	ラプラス変換
加法定理 $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$\rightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
微分定理 $\frac{df(t)}{dt}$	$\rightarrow sF(s) - f(0)$
積分定理 $\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\rightarrow \frac{F(s)}{s}$
たたみ込み定理 $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$	$\rightarrow F_1(s) F_2(s)$
推移定理 $f(t-a)$	$\rightarrow e^{-as} F(s)$
初期値定理 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$= \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
最終値定理 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

3

基本関数のラプラス変換

(a) インパルス関数

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt$$



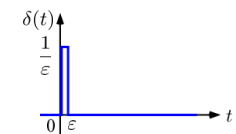
$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \cdot e^{-st} dt$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\epsilon s} [e^{-st}]_0^{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\epsilon s} (e^{-s\epsilon} - 1)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\frac{d}{d\epsilon}(e^{-s\epsilon} - 1)}{\frac{d}{d\epsilon}\epsilon s} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{-se^{-s\epsilon}}{s} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-s\epsilon} = 1$$

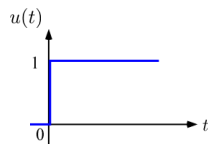
ロピタルの定理



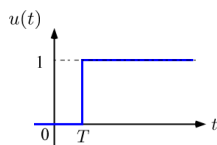
4

(b) ステップ関数

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t)] &= \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = -\frac{1}{s} (0 - 1) = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

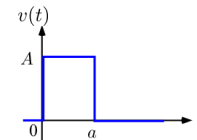


$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t-T)] &= \int_0^{\infty} u(t-T) e^{-st} dt \\ &= \int_T^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_T^{\infty} = -\frac{1}{s} (0 - e^{-Ts}) = \frac{e^{-Ts}}{s} \end{aligned}$$

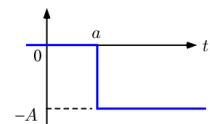
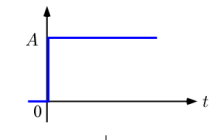


5

【例】



$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v(t)] &= A \frac{1}{s} - A \frac{e^{-as}}{s} \\ &= \frac{A}{s} (1 - e^{-as}) \end{aligned}$$



6

【ドリル問題42.1(4)】

7

5 ラプラス変換とその応用

5.3 ラプラス逆変換

【例1】異なる極の場合

$$F(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} \quad \text{とおく}$$

(解法1)

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} = \frac{K_1(s+2) + K_2(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{(K_1+K_2)s + 2K_1 + K_2}{(s+1)(s+2)}$$

$$F(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)} \quad \text{と比較}$$

$$K_1 + K_2 = 3, \quad 2K_1 + K_2 = 5 \quad \text{から} \quad K_1 = 2, \quad K_2 = 1$$

8

(解法2)

$$K_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \left. \frac{3s+5}{s+2} \right|_{s=-1} = 2 \quad \frac{3(-1)+5}{(-1)+2} = K_1 + 0$$

$$K_2 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \left. \frac{3s+5}{s+1} \right|_{s=-2} = 1$$

よって $F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2e^{-t} + e^{-2t}$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} \quad F(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$

$$(s+1)F(s) = K_1 + \frac{K_2(s+1)}{s+2}$$

$$\frac{3s+5}{s+2} = K_1 + \frac{K_2(s+1)}{s+2}$$

$$s = -1 \text{ を代入} \quad \frac{3(-1)+5}{(-1)+2} = K_1 + 0$$

9

【例2】重極の場合

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{(s+2)^2}$$

$$K_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \left. \frac{s+3}{(s+2)^2} \right|_{s=-1} = \frac{-1+3}{(-1+2)^2} = 2$$

$$K_3 = (s+2)^2 F(s)|_{s=-2} = \left. \frac{s+3}{s+1} \right|_{s=-2} = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$$

$$\frac{d}{ds}(s+2)^2 F(s) = \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+2)^2 K_1}{s+1} \right] + K_2 \quad \text{より}$$

$$K_2 = \left. \frac{d}{ds}(s+2)^2 F(s) \right|_{s=-2} = \left. \frac{d}{ds} \frac{s+3}{s+1} \right|_{s=-2}$$

$$= \left. \frac{(s+1) - (s+3)}{(s+1)^2} \right|_{s=-2} = -2$$

10

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{-1}{(s+2)^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2e^{-t} - 2e^{-2t} - te^{-2t}$$

11

【ドリル問題42.2(1)】

【ドリル問題42.2(2)】

【ドリル問題42.2(3)】

12

5 ラプラス変換とその応用

5.4 微分方程式の解

【問題9(1)】(問題42.3(1)とおなじ)

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 0, \quad y(0) = 1$$

ラプラス変換すると

$$sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=1} + 2Y(s) = 0$$

$$(s+2)Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-2t}$$

13

【問題10(1)】

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 8y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

ラプラス変換すると

$$s^2Y(s) - \underbrace{sy(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} + 2(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}) - 8Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2 + 2s - 8)Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s - 8)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s - 8)} = \frac{1}{s(s+4)(s-2)}$$

$$= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s-2} + \frac{c_3}{s+4}$$

14

$$Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s-2} + \frac{c_3}{s+4} \qquad Y(s) = \frac{1}{s(s+4)(s-2)}$$

$$c_1 = sY(s)|_{s=0} = \frac{1}{(s+4)(s-2)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4 \times (-2)} = -\frac{1}{8}$$

$$c_2 = (s-2)Y(s)|_{s=2} = \frac{1}{s(s+4)} \Big|_{s=2} = \frac{1}{2 \times 6} = \frac{1}{12}$$

$$c_3 = (s+4)Y(s)|_{s=-4} = \frac{1}{s(s-2)} \Big|_{s=-4} = \frac{1}{(-4)(-6)} = \frac{1}{24}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{8} \frac{1}{s} + \frac{1}{12} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{24} \frac{1}{s+4}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{8} + \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{1}{24}e^{-4t}$$

15

【ドリル問題42.3(1)】

【ドリル問題42.3(4)】

16

第5章：ラプラス変換とその応用

- 5.1 定義
- 5.2 ラプラス変換の諸性質
- 5.3 ラプラス逆変換
- 5.4 微分方程式の解

キーワード：ラプラス変換

学習目標：ラプラス変換を理解する。

17