第 5章：ラプラス変換とその応用

キーワード： ラプラス変換

学習目標：ラプラス変換を理解する。

5 ラプラス変換とその応用

5.1 定義

時間 t の領域

周波数 s の領域

時間 t を変数とする $f(t)$ の微分方程式 → 複素周波数 s を変数とする $F(s)$ の代数方程式

直接解法

初期条件を用いて積分定数を決める

代数計算

初期条件は自動的に導入される

解 $f(t)$ ← $F(s)$ を求める

5 ラプラス変換とその応用
5.2 ラプラス変換の諸性質

	時間関数		ラプラス変換
加法定理	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$\Rightarrow$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
微分定理	$\dfrac{df(t)}{dt}$	$\Rightarrow$	$sF(s) - f(0)$
積分定理	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\Rightarrow$	$\dfrac{F(s)}{s}$
たたみ込み定理	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$	$\Rightarrow$	$F_1(s)F_2(s)$
推移定理	$f(t-a)$	$\Rightarrow$	$e^{-as}F(s)$

初期値定理

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

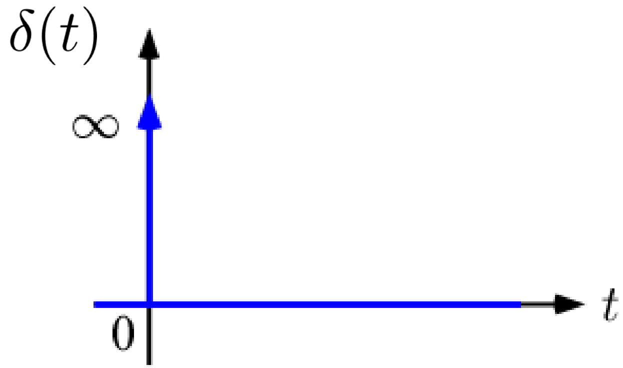
最終値定理

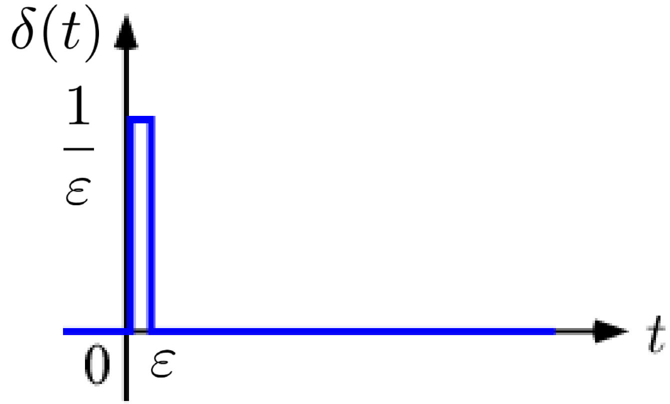
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

基本関数のラプラス変換

(a) インパルス関数

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt$$





$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt$$

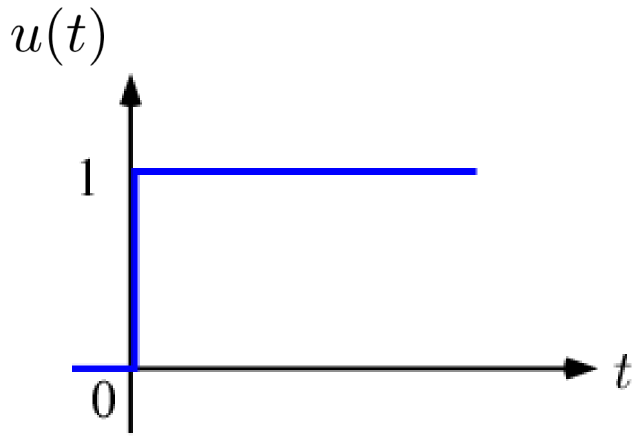
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}\cdot e^{-st}dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{s}(e^{-s\varepsilon}-1)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\frac{d}{d\varepsilon}(e^{-s\varepsilon}-1)}{\frac{d}{d\varepsilon}\varepsilon s} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{-se^{-s\varepsilon}}{s} = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-s\varepsilon} = 1$$

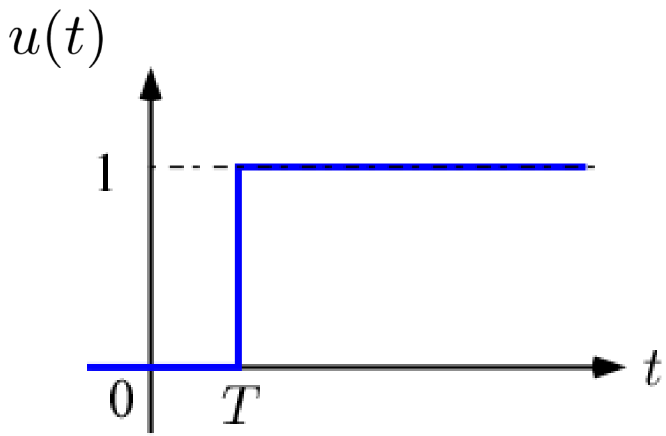
ロピタルの定理

(b) ステップ関数



$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

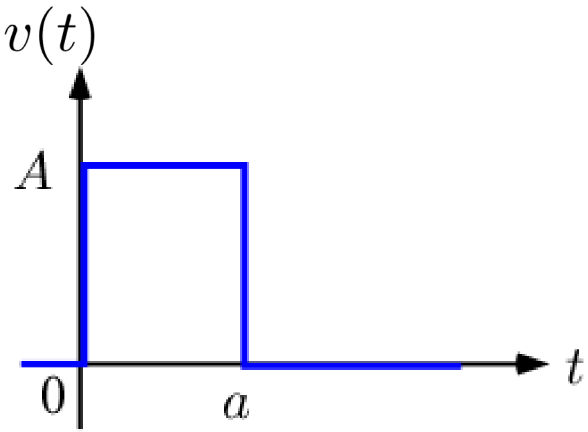


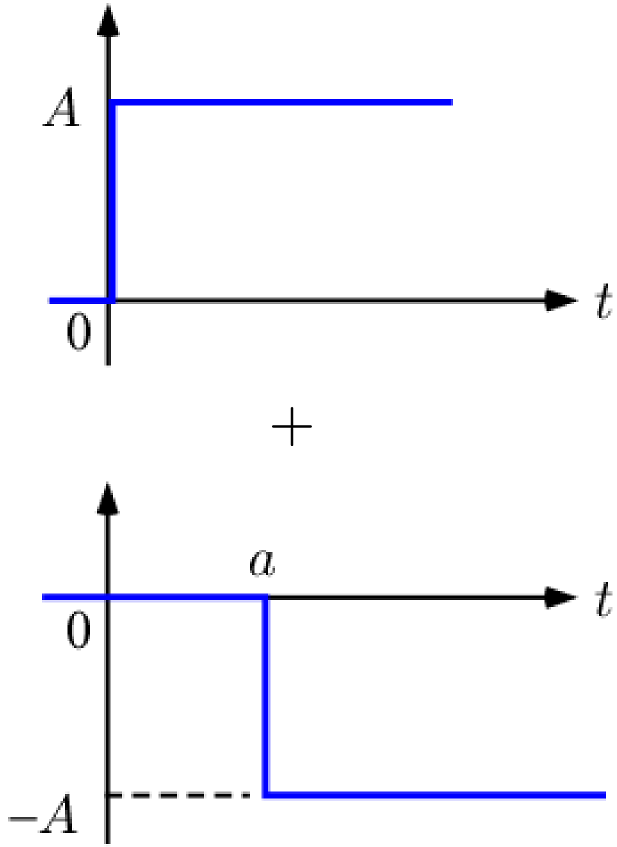
$$\mathcal{L}[u(t-T)] = \int_0^\infty u(t-T)e^{-st}dt$$

$$= \int_T^\infty 1 \cdot e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_T^\infty = -\frac{1}{s}(0-e^{-Ts}) = \frac{e^{-Ts}}{s}$$

【例】





$$\mathcal{L}[v(t)] = A\frac{1}{s} - A\frac{e^{-as}}{s}$$

$$= \frac{A}{s}\left(1 - e^{-as}\right)$$

【ドリル問題42.1(4)】

5 ラプラス変換とその応用

5.3 ラプラス逆変換

【例1】異なる極の場合

$$F(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$ とおく

（解法1）

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} = \frac{K_1(s+2)+K_2(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{(K_1+K_2)s + 2K_1 + K_2}{(s+1)(s+2)}$$

$$F(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$ と比較

$K_1 + K_2 = 3,\ \ 2K_1 + K_2 = 5$ から $K_1 = 2,\ K_2 = 1$

（解法2）

$$K_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \left.\frac{3s+5}{s+2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$\frac{3(-1)+5}{(-1)+2} = K_1 + 0$$

$$K_2 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \left.\frac{3s+5}{s+1}\right|_{s=-2} = 1$$

よって $F(s) = \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{1}{s+2}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2e^{-t} + e^{-2t}$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} \qquad F(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$

$$(s+1)F(s) = K_1 + \frac{K_2(s+1)}{s+2}$$

$$\frac{3s+5}{s+2} = K_1 + \frac{K_2(s+1)}{s+2}$$

$s = -1$ を代入 $\dfrac{3(-1)+5}{(-1)+2} = K_1 + 0$

【例2】重極の場合

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{(s+2)^2}$$

$$K_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \left.\frac{s+3}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = \frac{-1+3}{(-1+2)^2} = 2$$

$$K_3 = (s+2)^2 F(s)|_{s=-2} = \left.\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-2} = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$$

$$\frac{d}{ds}(s+2)^2 F(s) = \frac{d}{ds}\left[\frac{(s+2)^2 K_1}{s+1}\right] + K_2$$ より

$$K_2 = \frac{d}{ds}(s+2)^2 F(s)|_{s=-2} = \left.\frac{d}{ds}\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-2}$$

$$= \left.\frac{(s+1)-(s+3)}{(s+1)^2}\right|_{s=-2} = -2$$

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{-1}{(s+2)^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2e^{-t} - 2e^{-2t} - te^{-2t}$$

【ドリル問題42.2(1)】

【ドリル問題42.2(2)】

【ドリル問題42.2(3)】

5 ラプラス変換とその応用
5.4 微分方程式の解

【問題9(1)】(問題42.3(1)とおなじ)

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 0, \quad y(0) = 1$$

ラプラス変換すると

$$sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=1} + 2Y(s) = 0$$

$$(s+2)Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-2t}$$

【問題10(1)】

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 8y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

ラプラス変換すると

$$s^2Y(s) - \underbrace{sy(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} + 2(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}) - 8Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2 + 2s - 8)Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s - 8)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s - 8)} = \frac{1}{s(s+4)(s-2)}$$

$$= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s-2} + \frac{c_3}{s+4}$$

$$Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s-2} + \frac{c_3}{s+4} \qquad Y(s) = \frac{1}{s(s+4)(s-2)}$$

$$c_1 = sY(s)|_{s=0} = \left.\frac{1}{(s+4)(s-2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{4\times(-2)} = -\frac{1}{8}$$

$$c_2 = (s-2)Y(s)|_{s=2} = \left.\frac{1}{s(s+4)}\right|_{s=2} = \frac{1}{2\times 6} = \frac{1}{12}$$

$$c_2 = (s+4)Y(s)|_{s=-4} = \left.\frac{1}{s(s-2)}\right|_{s=-4} = \frac{1}{(-4)(-6)} = \frac{1}{24}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{8}\frac{1}{s} + \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{24}\frac{1}{s+4}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{8} + \frac{1}{12}e^{-2t} + + \frac{1}{24}e^{-4t}$$

【ドリル問題42.3(1)】

【ドリル問題42.3(4)】

第 5章：ラプラス変換とその応用

5.1 定義
5.2 ラプラス変換の諸性質
5.3 ラプラス逆変換
5.4 微分方程式の解

キーワード： ラプラス変換

学習目標：ラプラス変換を理解する。