## 第 5章：ラプラス変換とその応用

5.4 微分方程式の解

キーワード： $RC$回路，$RL$回路

学習目標：ラプラス変換を用いて$RC$回路，$RL$回路の過渡応答を解けるようになる。



---

### 5 ラプラス変換とその応用
#### 5.4 微分方程式の解

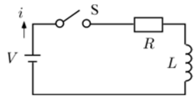


図2 $RL$回路

$RL$回路

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = V$$

ラプラス変換 $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$

$$RI(s) + L(sI(s) - i(0)) = \frac{V}{s}$$

$$(sL+R)I(s) = \frac{V}{s} + Li(0)$$

$$I(s) = \frac{V}{s(sL+R)} + \frac{Li(0)}{sL+R}$$

$$= \frac{V}{R}\frac{1}{s} - \frac{V}{R}\frac{1}{s+\frac{R}{L}} + \frac{i(0)}{s+\frac{R}{L}}$$



---

逆ラプラス変換

$$I(s) = \frac{V}{R}\frac{1}{s} - \frac{V}{R}\frac{1}{s+\frac{R}{L}} + \frac{i(0)}{s+\frac{R}{L}}$$

$$i(t) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + i(0)e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) + i(0)e^{-\frac{R}{L}t}$$



---

### 5 ラプラス変換とその応用
#### 5.4 微分方程式の解

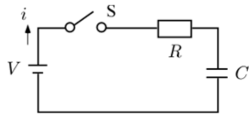


図1 $RC$回路

$RC$回路

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = V$$

【解法1】

$i = \frac{dq}{dt}$ の関係を用いると

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V$$

ラプラス変換 $Q(s) = \mathcal{L}[q(t)]$

$$R(sQ(s) - q(0)) + \frac{Q(s)}{C} = V\frac{1}{s}$$

$$\left(sR + \frac{1}{C}\right)Q(s) = \frac{V}{s} + Rq(0)$$



---

$$Q(s) = \frac{V}{s\left(sR+\frac{1}{C}\right)} + \frac{Rq(0)}{sR+\frac{1}{C}} = \frac{\frac{V}{R}}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} + \frac{q(0)}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$X(s) = \frac{\frac{V}{R}}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+\frac{1}{RC}}$$ とおくと

$$K_1 = sX(s)|_{s=0} = \left.\frac{\frac{V}{R}}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}\right|_{s=0} = CV$$

$$K_2 = \left.\left(s+\frac{1}{RC}\right)Q(s)\right|_{s=-\frac{1}{RC}} = \left.\frac{\frac{V}{R}}{s}\right|_{s=-\frac{1}{RC}} = -CV$$

よって

$$Q(s) = \frac{CV}{s} - \frac{CV}{s+\frac{1}{RC}} + \frac{q(0)}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$= CV\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right) + \frac{q(0)}{s+\frac{1}{RC}}$$



---

逆ラプラス変換により

$$Q(s) = CV\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right) + \frac{q(0)}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$q(t) = CV\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) + q(0)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$= CV\left(\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{q(0)}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$= \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{q(0)}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$= \frac{1}{R}\left(V - \frac{q_0}{C}\right)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

【解法2】

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = V$$

ラプラス変換 $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$

$$RI(s) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{q(0)}{sC} = \frac{V}{s}$$

$$\left(R + \frac{1}{Cs}\right) I(s) = \frac{V}{s} - \frac{q(0)}{Cs}$$

$$\frac{RCs+1}{Cs} I(s) = \frac{V}{s} - \frac{q(0)}{Cs}$$

$$I(s) = \frac{CV}{RCs+1} - \frac{q(0)}{RCs+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{R}V}{s+\frac{1}{RC}} - \frac{\frac{1}{RC}q(0)}{s+\frac{1}{RC}}$$

7

逆ラプラス変換により

$$I(s) = \frac{\frac{1}{R}V}{s+\frac{1}{RC}} - \frac{\frac{1}{RC}q(0)}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{q(0)}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$= \frac{1}{R}\left(V - \frac{q_0}{C}\right)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

8

【ドリル問題43.3】

【ドリル問題43.5】

9

## 第 5章：ラプラス変換とその応用

5.4 微分方程式の解

キーワード： $RC$回路，$RL$回路

学習目標：ラプラス変換を用いて$RC$回路，$RL$回路の過渡応答を解けるようになる。

10

## 5 ラプラス変換とその応用

### 5.4 微分方程式の解

$V(t) = V\sin\omega t$（交流電源）のとき

$$\mathcal{L}[e_s(t)] = \frac{\omega V}{s^2+\omega^2}$$

$$RI(s) + L(sI(s) - \underbrace{i(0)}_{=0}) = \frac{V}{s}$$

$$(sL+R)I(s) = \frac{V\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$I(s) = \frac{1}{sL+R}\frac{V\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{V}{L}\frac{\omega}{\left(s+\frac{R}{L}\right)(s^2+\omega^2)}$$

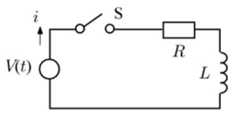


図6.6 $RL$回路

11

部分分数分解

$$f = \frac{\omega}{\left(s+\frac{R}{L}\right)(s^2+\omega^2)} = \frac{K_1}{s+\frac{R}{L}} + \frac{K_2}{s-j\omega} + \frac{K_3}{s+j\omega}$$ とおく

$$K_1 = f\left(s+\frac{R}{L}\right)\Big|_{s=-\frac{R}{L}} = \frac{\omega}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}$$

$$K_2 = f\,(s-j\omega)|_{s=j\omega} = \frac{\omega}{\left(s+\frac{R}{L}\right)(s+j\omega)}\Bigg|_{s=j\omega} = \frac{\omega}{2j\omega\left(j\omega+\frac{R}{L}\right)}$$

$$K_3 = f\,(s+j\omega)|_{s=-j\omega} = \frac{\omega}{\left(s+\frac{R}{L}\right)(s-j\omega)}\Bigg|_{s=j\omega} = \frac{\omega}{-2j\omega\left(-j\omega+\frac{R}{L}\right)}$$

12

よって

$$I(s)=\frac{V}{L}\left\{\frac{\omega}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}\frac{1}{s+\frac{R}{L}}+\frac{\omega}{2j\omega\left(j\omega+\frac{R}{L}\right)}\frac{1}{s-j\omega}+\frac{\omega}{-2j\omega\left(-j\omega+\frac{R}{L}\right)}\frac{1}{s+j\omega}\right\}$$

$$\frac{\left(-j\omega+\frac{R}{L}\right)}{2j\left(\omega^2+\frac{R^2}{L^2}\right)}\frac{s+j\omega}{s^2+\omega^2}-\frac{\left(j\omega+\frac{R}{L}\right)}{2j\left(\omega^2+\frac{R^2}{L^2}\right)}\frac{s-j\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{-j\omega s+\cancel{\frac{R}{L}s}+\cancel{\omega^2}+j\omega\frac{R}{L}}{2j\left(\omega^2+\frac{R^2}{L^2}\right)(s^2+\omega^2)}-\frac{j\omega s+\cancel{\frac{R}{L}s}+\cancel{\omega^2}-j\frac{R}{L}\omega}{2j\left(\omega^2+\frac{R^2}{L^2}\right)(s^2+\omega^2)}$$

$$=\frac{-\omega s+\omega\frac{R}{L}}{\left(\omega^2+\frac{R^2}{L^2}\right)(s^2+\omega^2)}$$

$$I(s)=\frac{V}{L}\left\{\frac{\omega}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}\frac{1}{s+\frac{R}{L}}+\frac{-\omega s+\omega\frac{R}{L}}{\left(\omega^2+\frac{R^2}{L^2}\right)(s^2+\omega^2)}\right\}$$

13

$$I(s)=\frac{V}{L}\left\{\frac{\omega}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}\frac{1}{s+\frac{R}{L}}+\frac{-\omega s+\omega\frac{R}{L}}{\left(\omega^2+\frac{R^2}{L^2}\right)(s^2+\omega^2)}\right\}$$

$$=\frac{V\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\frac{1}{s+\frac{R}{L}}+\frac{VR}{(R^2+\omega^2L^2)}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{-V\omega L}{(R^2+\omega^2L^2)}\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

**逆ラプラス変換**

$$i(t)=\frac{V\omega L}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{VR}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t+\frac{-V\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t$$

$$=\frac{V\omega L}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+A\sin(\omega t+\phi)$$

$$A=\sqrt{\frac{(VR)^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}+\frac{(V\omega L)^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}}=\frac{V\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}{R^2+\omega^2L^2}=\frac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

$$\tan\phi=\frac{\frac{-V\omega L}{R^2+\omega^2L^2}}{\frac{VR}{R^2+\omega^2L^2}}=-\frac{\omega L}{R}$$

14