

第5章：ラプラス変換とその応用

5.4 微分方程式の解

キーワード： RC 回路, RL 回路

学習目標：ラプラス変換を用いて RC 回路, RL 回路の過渡応答を解けるようになる。

5 ラプラス変換とその応用

5.4 微分方程式の解

RL回路

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = V$$

ラプラス変換 $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$

$$RI(s) + L(sI(s) - i(0)) = \frac{V}{s}$$

$$(sL + R)I(s) = \frac{V}{s} + Li(0)$$

$$I(s) = \frac{V}{s(sL + R)} + \frac{Li(0)}{sL + R}$$

$$= \frac{V}{R} \frac{1}{s} - \frac{V}{R} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{i(0)}{s + \frac{R}{L}}$$

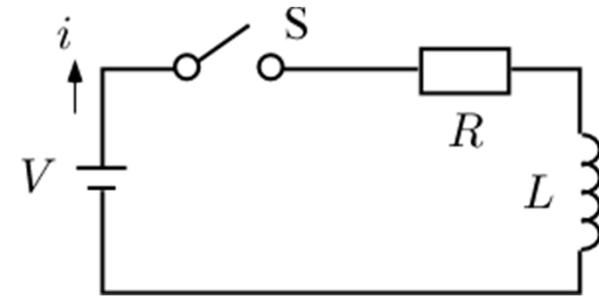


図2 RL回路

逆ラプラス変換

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V}{R} - \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + i(0)e^{-\frac{R}{L}t} \\ &= \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) + i(0)e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

$$I(s) = \frac{V}{R} \frac{1}{s} - \frac{V}{R} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{i(0)}{s + \frac{R}{L}}$$

5 ラプラス変換とその応用

5.4 微分方程式の解

RC回路

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V$$

【解法1】

$i = \frac{dq}{dt}$ の関係を用いると

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V$$

ラプラス変換 $Q(s) = \mathcal{L}[q(t)]$

$$R(sQ(s) - q(0)) + \frac{Q(s)}{C} = V \frac{1}{s}$$

$$\left(sR + \frac{1}{C} \right) Q(s) = \frac{V}{s} + Rq(0)$$

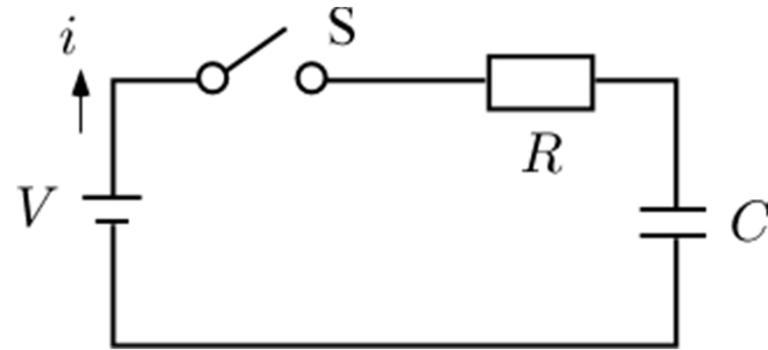


図1 RC回路

$$Q(s) = \frac{V}{s(sR + \frac{1}{C})} + \frac{Rq(0)}{sR + \frac{1}{C}} = \frac{\frac{V}{R}}{s(s + \frac{1}{RC})} + \frac{q(0)}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$X(s) = \frac{\frac{V}{R}}{s(s + \frac{1}{RC})} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + \frac{1}{RC}} \quad \text{とおくと}$$

$$K_1 = sX(s)|_{s=0} = \frac{\frac{V}{R}}{(s + \frac{1}{RC})} \Big|_{s=0} = CV$$

$$K_2 = \left(s + \frac{1}{RC}\right) Q(s) \Big|_{s=-\frac{1}{RC}} = \frac{\frac{V}{R}}{s} \Big|_{s=-\frac{1}{RC}} = -CV$$

よって

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{CV}{s} - \frac{CV}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{q(0)}{s + \frac{1}{RC}} \\ &= CV \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) + \frac{q(0)}{s + \frac{1}{RC}} \end{aligned}$$

逆ラプラス変換により

$$Q(s) = CV \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) + \frac{q(0)}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$q(t) = CV \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) + q(0)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$= CV \left(\frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{q(0)}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$= \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{q(0)}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$= \frac{1}{R} \left(V - \frac{q_0}{C} \right) e^{-\frac{1}{RC}t}$$

【解法2】

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V$$

ラプラス変換 $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$

$$RI(s) + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{q(0)}{sC} = \frac{V}{s}$$

$$\left(R + \frac{1}{Cs} \right) I(s) = \frac{V}{s} - \frac{q(0)}{Cs}$$

$$\frac{RCs + 1}{Cs} I(s) = \frac{V}{s} - \frac{q(0)}{Cs}$$

$$I(s) = \frac{CV}{RCs + 1} - \frac{q(0)}{RCs + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{R}V}{s + \frac{1}{RC}} - \frac{\frac{1}{RC}q(0)}{s + \frac{1}{RC}}$$

逆ラプラス変換により

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{q(0)}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \\ &= \frac{1}{R} \left(V - \frac{q_0}{C} \right) e^{-\frac{1}{RC}t} \end{aligned}$$

$$I(s) = \frac{\frac{1}{R}V}{s + \frac{1}{RC}} - \frac{\frac{1}{RC}q(0)}{s + \frac{1}{RC}}$$

【ドリル問題43.3】

【ドリル問題43.5】

第5章：ラプラス変換とその応用

5.4 微分方程式の解

キーワード： RC 回路, RL 回路

学習目標：ラプラス変換を用いて RC 回路, RL 回路の過渡応答を解けるようになる。

5 ラプラス変換とその応用

5.4 微分方程式の解

$V(t) = V \sin \omega t$ (交流電源) のとき

$$\mathcal{L}[e_s(t)] = \frac{\omega V}{s^2 + \omega^2}$$

$$RI(s) + L(sI(s) - \underbrace{i(0)}_{=0}) = \frac{V}{s}$$

$$(sL + R)I(s) = \frac{V\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$I(s) = \frac{1}{sL + R} \frac{V\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{V}{L} \frac{\omega}{\left(s + \frac{R}{L}\right) (s^2 + \omega^2)}$$

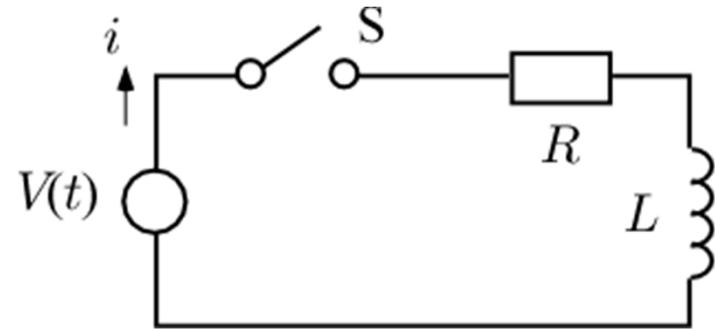


図6.6 RL回路

部分分数分解

$$f = \frac{\omega}{\left(s + \frac{R}{L}\right)(s^2 + \omega^2)} = \frac{K_1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{K_2}{s - j\omega} + \frac{K_3}{s + j\omega} \quad \text{とおく}$$

$$K_1 = f \left(s + \frac{R}{L} \right) \Big|_{s = -\frac{R}{L}} = \frac{\omega}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2}$$

$$K_2 = f (s - j\omega) \Big|_{s = j\omega} = \frac{\omega}{\left(s + \frac{R}{L}\right)(s + j\omega)} \Big|_{s = j\omega} = \frac{\omega}{2j\omega \left(j\omega + \frac{R}{L}\right)}$$

$$K_3 = f (s + j\omega) \Big|_{s = -j\omega} = \frac{\omega}{\left(s + \frac{R}{L}\right)(s - j\omega)} \Big|_{s = -j\omega} = \frac{\omega}{-2j\omega \left(-j\omega + \frac{R}{L}\right)}$$

よって

$$I(s) = \frac{V}{L} \left\{ \frac{\omega}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{\omega}{2j\omega \left(j\omega + \frac{R}{L}\right)} \frac{1}{s - j\omega} + \frac{\omega}{-2j\omega \left(-j\omega + \frac{R}{L}\right)} \frac{1}{s + j\omega} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left(-j\omega + \frac{R}{L}\right)}{2j\left(\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}\right)} \frac{s + j\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\left(j\omega + \frac{R}{L}\right)}{2j\left(\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}\right)} \frac{s - j\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{-j\omega s + \cancel{\frac{R}{L}s} + \cancel{\omega^2} + j\omega \frac{R}{L}}{2j\left(\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}\right)(s^2 + \omega^2)} - \frac{j\omega s + \cancel{\frac{R}{L}s} + \cancel{\omega^2} - j\frac{R}{L}\omega}{2j\left(\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}\right)(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{-\omega s + \omega \frac{R}{L}}{\left(\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}\right)(s^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

$$I(s) = \frac{V}{L} \left\{ \frac{\omega}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{-\omega s + \omega \frac{R}{L}}{\left(\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}\right)(s^2 + \omega^2)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{V}{L} \left\{ \frac{\omega}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{-\omega s + \omega \frac{R}{L}}{(\omega^2 + \frac{R^2}{L^2})(s^2 + \omega^2)} \right\} \\
&= \frac{V\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{VR}{(R^2 + \omega^2 L^2)} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{-V\omega L}{(R^2 + \omega^2 L^2)} \frac{s}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

逆ラプラス変換

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{V\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{VR}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t + \frac{-V\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t \\
&= \frac{V\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + A \sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

$$A = \sqrt{\frac{(VR)^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{(V\omega L)^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}} = \frac{V\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{\frac{-V\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{VR}{R^2 + \omega^2 L^2}} = -\frac{\omega L}{R}$$