

第 24 章 : 非正弦波交流 * 3年生電気回路Iのテキスト

第 4 章 : 非正弦波交流 * 問題集「電気回路」

- 非正弦波交流
- フーリエ級数による非正弦波の展開

キーワード : **フーリエ級数**

学習目標 : フーリエ級数を理解できる。

1

24. 非正弦波交流

フーリエ級数

$f(t) = f(t+T)$ であるとき, $f(t)$ は次の三角級数に展開することができる。

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots$$

$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots$$

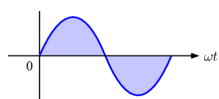
$$= \underline{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a_n \cos n\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{b_n \sin n\omega t}$$

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ フーリエ係数

2

展開関数の直交性

$\int_0^T \sin n\omega t dt = 0 \quad n = 1, 2, \dots$ 面積が0



$\int_0^T \cos n\omega t dt = 0 \quad n = 1, 2, \dots$ 面積が0

$$\int_0^T \sin m\omega t \cdot \cos n\omega t dt = 0$$

$$= \int_0^T \frac{1}{2} \{ \sin(m+n)\omega t + \sin(m-n)\omega t \} dt$$

$$= \int_0^T \frac{1}{2} \sin(m+n)\omega t dt + \int_0^T \frac{1}{2} \sin(m-n)\omega t dt = 0$$

$\underline{\quad = 0 \quad} \quad \underline{\quad = 0 \quad}$

3

$$\int_0^T \sin m\omega t \cdot \sin n\omega t dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{T}{2} & (m = n) \end{cases}$$

$m \neq n$ のとき

$$\int_0^T \sin m\omega t \cdot \sin n\omega t dt$$

$$= \int_0^T \left[-\frac{1}{2} \{ \cos(m+n)\omega t - \cos(m-n)\omega t \} \right] dt = 0$$

$m = n$ のとき

$$\int_0^T \sin m\omega t \cdot \sin n\omega t dt$$

$$= \int_0^T \sin^2 n\omega t = \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2n\omega t) dt = \frac{T}{2}$$

4

$$\int_0^T \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{T}{2} & (m = n) \end{cases}$$

$m \neq n$ のとき

$$\int_0^T \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t dt$$

$$= \int_0^T \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)\omega t + \cos(m-n)\omega t \} dt = 0$$

$m = n$ のとき

$$\int_0^T \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t dt$$

$$= \int_0^T \cos^2 n\omega t = \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos 2n\omega t) dt = \frac{T}{2}$$

5

$f(t) = f(t+T)$ のとき

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$\theta = \omega t$ のとき $T = 2\pi$

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

6

【補足】

$$\theta = \omega t \text{ より } \frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\omega}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \quad \begin{array}{l} t \mid 0 \rightarrow T \\ \theta \mid 0 \rightarrow \omega T (= 2\pi) \end{array}$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\theta \frac{d\theta}{\omega}$$

$$= \frac{2}{\omega T} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\theta d\theta$$

7

フーリエ係数の決定

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T a_0 dt + \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \right) dt$$

$$= a_0 T$$

よって

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

8

$$\int_0^T f(t) \cos n\omega t dt$$

$$= \int_0^T a_0 \cos n\omega t dt + \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \right) \cos n\omega t dt$$

$$= \int_0^T a_n \cos n\omega t \cdot \cos n\omega t dt$$

$$= \frac{T}{2} a_n$$

よって

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt$$

9

$$\int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

$$= \int_0^T a_0 \sin n\omega t dt + \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \right) \sin n\omega t dt$$

$$= \int_0^T b_n \sin n\omega t \cdot \sin n\omega t dt$$

$$= \frac{T}{2} b_n$$

よって

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

10

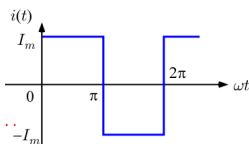
対称波 $f(t) = -f(t+\pi)$ のとき

半周期 $\frac{T}{2}$

直流成分 $a_0 = 0$

奇数次高調波成分のみ $n = 1, 3, 5, \dots$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

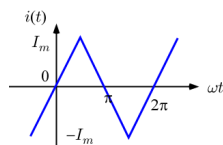


奇関数波 $f(t) = -f(-t)$ のとき

直流成分 $a_0 = 0$

cos 成分 $a_n = 0$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

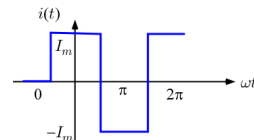


11

偶関数波 $f(t) = f(-t)$ のとき

sin 成分 $b_n = 0$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$



12

【補足】

フーリエ係数を求めることは、部分分数展開と同じ
部分分数展開

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

$$a = \frac{(x+1)f(x)|_{x=-1}}{x+2} = \frac{1}{x+2} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{1} = 1$$

自分の持っている関数を全体に掛けて打ち消す

フーリエ係数

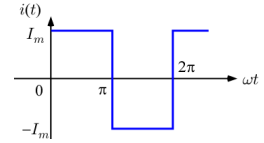
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \quad b_n \text{ を求めるには、自分の関数} \\ \sin n\omega t \text{ を掛けて打ち消す}$$

13

[例題1]

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\omega t dt \\ = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} I_m \sin n\omega t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-I_m) \sin n\omega t dt \right) \\ = \frac{I_m}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t \right]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t \right]_{\pi}^{2\pi} \right) \\ = -\frac{I_m}{n\omega\pi} (\cos n\omega\pi - 1 - (\cos 2n\omega\pi - \cos n\omega\pi))$$

$$T = 2\pi \text{ より } \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

14

$$b_n = -\frac{I_m}{n\pi} (\cos n\pi - 1 - (\cos 2n\pi - \cos n\pi)) \\ = -\frac{I_m}{n\pi} (-1 + 2\cos n\pi - \frac{\cos 2n\pi}{1}) \\ = -\frac{I_m}{n\pi} (2\cos n\pi - 2) \\ = -\frac{2I_m}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$$

$$n = 1 \quad b_1 = \frac{-2I_m}{\pi} (\cos \pi - 1) = \frac{4I_m}{\pi}$$

$$n = 2 \quad b_2 = -\frac{2I_m}{2\pi} (\cos 2\pi - 1) = 0$$

$$n = 3 \quad b_3 = \frac{-2I_m}{3\pi} (\cos 3\pi - 1) = \frac{4I_m}{3\pi}$$

15

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n\omega t dt \\ = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} I_m \cos n\omega t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-I_m) \cos n\omega t dt \right) \\ = \frac{I_m}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} \sin nt \right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n} \sin nt \right]_{\pi}^{2\pi} \right) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \\ = \frac{I_m}{n\pi} (\sin n\pi - 0 - (\sin 2n\pi - \sin n\pi)) \\ = \frac{I_m}{n\pi} (2\sin n\pi - \sin 2n\pi)$$

$$n = 1 \quad a_1 = \frac{I_m}{\pi} (2\sin \pi - \sin 2\pi) = 0$$

$$n = 2 \quad a_2 = \frac{I_m}{\pi} (2\sin 2\pi - \sin 4\pi) = 0$$

16

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} I_m dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-I_m) dx \right) = 0$$

よって

$$f(t) = \frac{4}{\pi} I_m \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

方形波の第 n 次調波の振幅は基本波の $\frac{1}{n}$

17

第 24 章 : 非正弦波交流 * 3年生電気回路Iのテキスト

24.1 非正弦波交流

24.2 正弦波の組み合わせと波形

24.3 フーリエ級数による非正弦波の展開

キーワード : **フーリエ級数**

学習目標 : **フーリエ級数を理解できる。**

18