

## 第 24 章 : 非正弦波交流

\* 3年生電気回路Iのテキスト

## 第 4 章 : 非正弦波交流

\* 問題集「電気回路」

- 非正弦波交流
- フーリエ級数による非正弦波の展開

キーワード : フーリエ級数

学習目標 : フーリエ級数を理解できる。

## 24. 非正弦波交流

### フーリエ級数

$f(t) = f(t + T)$  であるとき,  $f(t)$  は次の三角級数に展開することができる。

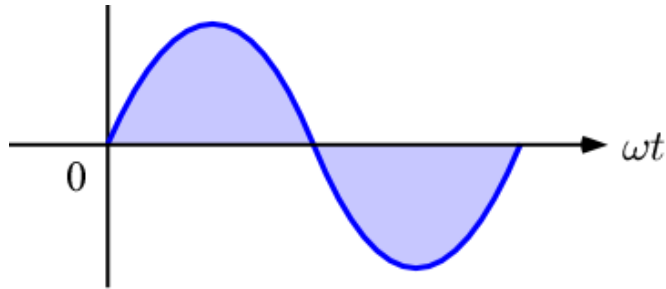
$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots \\ &\quad + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots \\ &= \underline{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a_n \cos n\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{b_n \sin n\omega t} \end{aligned}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

フーリエ係数

## 展開関数の直交性

$$\int_0^T \sin n\omega t dt = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{面積が } 0$$



$$\int_0^T \cos n\omega t dt = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{面積が } 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin m\omega t \cdot \cos n\omega t dt &= 0 \\ &= \int_0^T \frac{1}{2} \{ \sin(m+n)\omega t + \sin(m-n)\omega t \} dt \\ &= \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2} \sin(m+n)\omega t dt}_{= 0} + \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2} \sin(m-n)\omega t dt}_{= 0} = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^T \sin m\omega t \cdot \sin n\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{T}{2} & (m = n) \end{cases}$$

$m \neq n$  のとき

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin m\omega t \cdot \sin n\omega t \, dt \\ = \int_0^T \left[ -\frac{1}{2} \{ \cos(m+n)\omega t - \cos(m-n)\omega t \} \right] dt = 0 \end{aligned}$$

$m = n$  のとき

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin m\omega t \cdot \sin n\omega t \, dt \\ = \int_0^T \sin^2 n\omega t \, dt = \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2n\omega t) \, dt = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^T \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{T}{2} & (m = n) \end{cases}$$

$m \neq n$  のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^T \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t dt \\ &= \int_0^T \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)\omega t + \cos(m-n)\omega t \} dt = 0 \end{aligned}$$

$m = n$  のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^T \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t dt \\ &= \int_0^T \cos^2 n\omega t dt = \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos 2n\omega t) dt = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

$f(t) = f(t + T)$  のとき

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$\theta = \omega t$  のとき  $T = 2\pi$

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

## 【補足】

$$\theta = \omega t \text{ より } \frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\omega}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\theta \frac{d\theta}{\omega} \\ &= \frac{2}{\omega T} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\theta d\theta \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\theta d\theta \end{aligned}$$

$t$	$0 \rightarrow T$
<hr/>	
$\theta$	$0 \rightarrow \omega T (= 2\pi)$

## フーリエ係数の決定

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) dt &= \int_0^T a_0 dt + \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \right) dt \\ &= a_0 T \end{aligned}$$

よって

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$



$$\begin{aligned} & \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt \\ &= \int_0^T a_0 \cos n\omega t \, dt + \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \right) \cos n\omega t \, dt \\ &= \int_0^T a_n \cos n\omega t \cdot \cos n\omega t \, dt \\ &= \frac{T}{2} a_n \end{aligned}$$

よって

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt \\ &= \int_0^T a_0 \sin n\omega t + \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \right) \sin n\omega t \, dt \\ &= \int_0^T b_n \sin n\omega t \cdot \sin n\omega t \, dt \\ &= \frac{T}{2} b_n \end{aligned}$$

よって

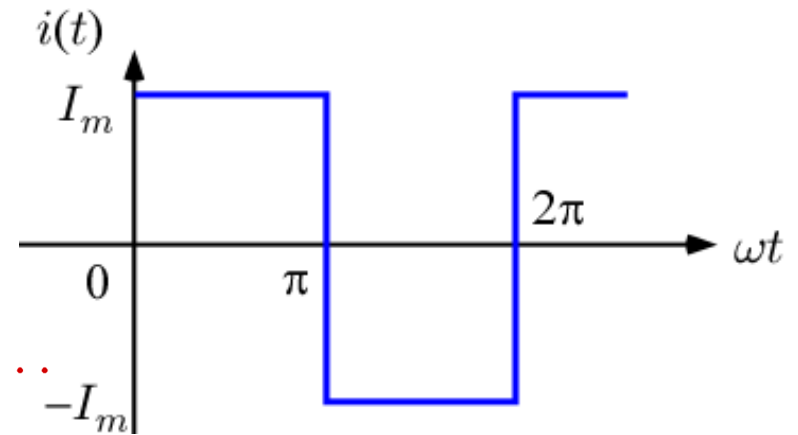
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt$$

対称波  $f(t) = -f(t + \frac{\pi}{\omega})$  のとき  
半周期  $\frac{T}{2}$

直流成分  $a_0 = 0$

奇数次高調波成分のみ  $n = 1, 3, 5, \dots$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

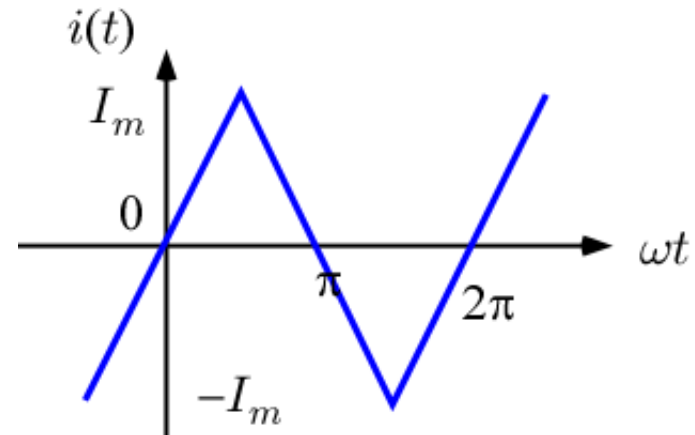


奇関数波  $f(t) = -f(-t)$  のとき

直流成分  $a_0 = 0$

cos 成分  $a_n = 0$

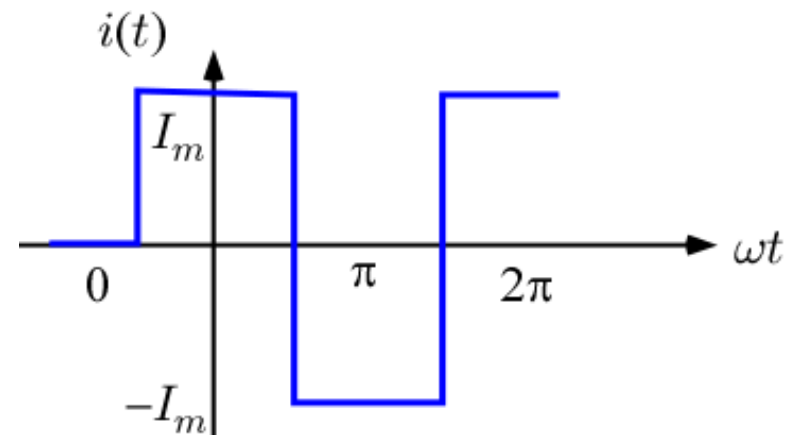
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$



偶関数波  $f(t) = f(-t)$  のとき

sin 成分  $b_n = 0$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$



## 【補足】

フーリエ係数を求めることは、部分分数展開と同じ

### 部分分数展開

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

$$a = \frac{(x+1)f(x)|_{x=-1}}{x+2}|_{x=-1} = \frac{1}{1} = 1$$

自分の持っている関数を全体に掛けて打ち消す

### フーリエ係数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

$b_n$  を求めるには、自分の関数  
 $\sin n\omega t$  を掛けて打ち消す

[ 例題 1 ]

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

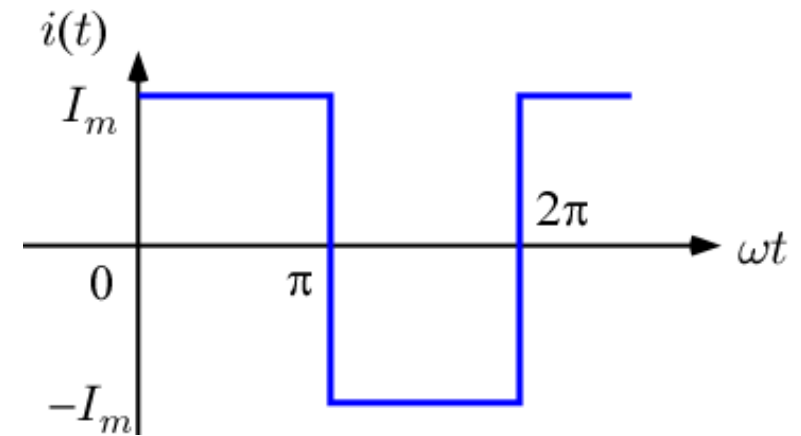
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\omega t dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} I_m \sin n\omega t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-I_m) \sin n\omega t dt \right)$$

$$= \frac{I_m}{\pi} \left( \left[ -\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t \right]_0^{\pi} - \left[ -\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t \right]_{\pi}^{2\pi} \right)$$

$$= -\frac{I_m}{n\omega\pi} (\cos n\omega\pi - 1 - (\cos 2n\omega\pi - \cos n\omega\pi))$$

$$T = 2\pi \text{ より } \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$



$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{I_m}{n\pi} (\cos n\pi - 1 - (\cos 2n\pi - \cos n\pi)) \\
&= -\frac{I_m}{n\pi} (-1 + 2 \cos n\pi - \underbrace{\cos 2n\pi}_{=1}) \\
&= -\frac{I_m}{n\pi} (2 \cos n\pi - 2) \\
&= -\frac{2I_m}{n\pi} (\cos n\pi - 1)
\end{aligned}$$

$$n = 1 \quad b_1 = \frac{-2I_m}{\pi} (\cos \pi - 1) = \frac{4I_m}{\pi}$$

$$n = 2 \quad b_2 = -\frac{2I_m}{2\pi} (\cos 2\pi - 1) = 0$$

$$n = 3 \quad b_3 = \frac{-2I_m}{3\pi} (\cos 3\pi - 1) = \frac{4I_m}{3\pi}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n\omega t \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} I_m \cos n\omega t \, dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-I_m) \cos n\omega t \, dt \right) \\
&= \frac{I_m}{\pi} \left( \left[ \frac{1}{n} \sin nt \right]_0^{\pi} - \left[ \frac{1}{n} \sin nt \right]_{\pi}^{2\pi} \right) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \\
&= \frac{I_m}{n\pi} (\sin n\pi - 0 - (\sin 2n\pi - \sin n\pi)) \\
&= \frac{I_m}{n\pi} (2 \sin n\pi - \sin 2n\pi)
\end{aligned}$$

$$n = 1 \quad a_1 = \frac{I_m}{\pi} (2 \sin \pi - \sin 2\pi) = 0$$

$$n = 2 \quad a_2 = \frac{I_m}{\pi} (2 \sin 2\pi - \sin 4\pi) = 0$$



$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} I_m dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-I_m) dx \right) = 0 \end{aligned}$$

よって

$$f(t) = \frac{4}{\pi} I_m \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

方形波の第  $n$  次調波の振幅は基本波の  $\frac{1}{n}$

## 第 24 章 : 非正弦波交流 \* 3年生電気回路Iのテキスト

24.1 非正弦波交流

24.2 正弦波の組み合わせと波形

24.3 フーリエ級数による非正弦波の展開

キーワード : フーリエ級数

学習目標 : フーリエ級数を理解できる。