志望専攻	専攻	受験番号	

令和８年度専攻科　学力検査による選抜　問題

数　学　　　４の１

総得点		得点	

1．次の問いに答えよ。

(1)　x の方程式 $\frac{1}{2}\log_5(2x+4)-\log_5\sqrt{3x-4}=\log_5 2$ を解け。（6 点）

まず，真数条件 $2x+4>0,\ 3x-4>0$ より $x>\frac{4}{3}$ であることに注意する。

$\frac{1}{2}\log_5(2x+4)-\log_5\sqrt{3x-4}=\log_5\sqrt{2x+4}-\log_5\sqrt{3x-4}=\log_5\sqrt{\frac{2x+4}{3x-4}}$, $\log_5 2=\log_5\sqrt{4}$

より，$\frac{2x+4}{3x-4}=4 \iff 2x+4=12x-16 \iff 10x=20 \iff x=2$ であり，$x=2$ は条件

$x>\frac{4}{3}$ を満たしているため，求める解は $x=2$ である。

(2)　不定積分 $\int x^2\cos 2x\,dx$ を求めよ。（6 点）

$$\int x^2\cos 2x\,dx=x^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int 2x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\int x\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\left\{x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

（C は任意の定数）

(3)　曲線 $y=x^{\frac{3}{2}}\ (0\leqq x\leqq 1)$ の長さを求めよ。（6 点）

$$\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\int_0^1\frac{3}{2}\sqrt{x+\frac{4}{9}}\,dx$$

$$=\left[\left(x+\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\left(\frac{13}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$$

(4)　行列 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ によって表される線形変換によって点 $(1,5)$ に移されるもとの点の座標を求めよ。（6 点）

求める点の座標を (x,y) とすると，$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ より，

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{4-6}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4-10\\-3+5\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ である。

よって，求める点の座標は $(3,-1)$ である。

(5)　1 個のサイコロを 5 回投げるとき，5 以上の目が 3 回出る確率を求めよ。（6 点）

1 個のサイコロを投げるとき，5 以上の目が出る確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ なので，求める確率は

${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5!}{3!2!}\times\frac{1}{3^3}\times\frac{2^2}{3^2}=\frac{40}{243}$ である。

志望専攻	専攻	受験番号	

令和８年度専攻科　学力検査による選抜　問題

数　学　　　４の２

得点	

2．関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ および，$f'(x)=0$ となる x の値を求めよ。（10 点）

$f'(x) = \dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}\left(= \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}\right)$（ここまでで 5 点）

$f'(x)=0 \iff x^2(2x-3)=0 \iff x=0,\ \dfrac{3}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to1+0} f(x),\ \lim_{x\to1-0} f(x)$ を求めよ。（10 点）

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ は $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より，

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{1} = \infty$ である。（5 点）

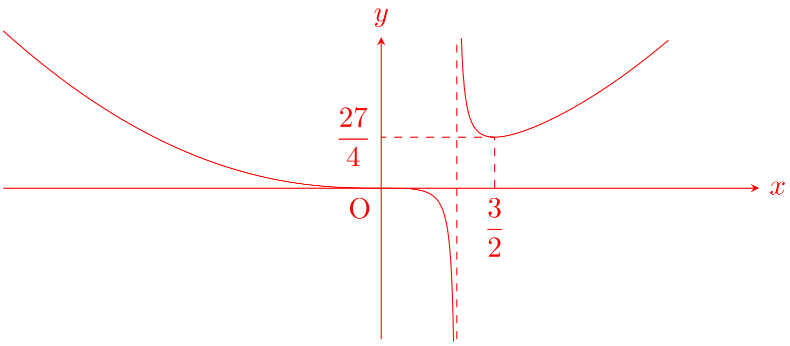
$x\to1+0$ のとき $x-1>0$, $x\to1-0$ のとき $x-1<0$ より，

$\displaystyle\lim_{x\to1\pm0} f(x)\left(=\frac{1}{\pm0}\right) = \pm\infty$（複号同順）である。（5 点）

(3) $f(x)$ の増減を調べ，グラフの概形をかけ。（10 点）

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$*$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

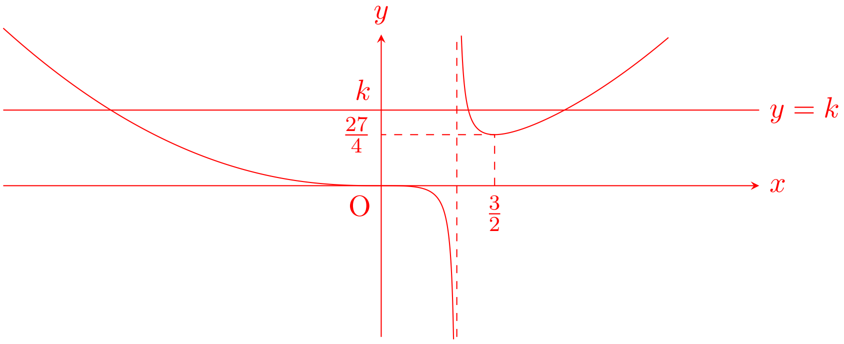
（ここまでで 5 点）



(4) x の方程式 $\dfrac{x^3}{x-1}=k$ が異なる 3 つの実数解を持つような定数 k の値の範囲を求めよ。（10 点）

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ が 3 点で交わるような定数 k の値の範囲を求めればよいので，図より，

$k>\dfrac{27}{4}$ である。



志望専攻	専攻	受験番号	

令和８年度専攻科　学力検査による選抜　問題

数　学　　　４の３

得点	

3．座標空間において原点を O とする。2 点 $\mathrm{A}(-4,4,-2)$, $\mathrm{B}(1,-4,-1)$ と 2 つのベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。（8 点）

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=(5,-8,1)$ に平行で点 $(-4,4,-2)$ を通るので，

$\dfrac{x-(-4)}{5}=\dfrac{y-4}{-8}=\dfrac{z-(-2)}{1}$ より $\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y-4}{-8}=z+2$ である。

また，点 $(1,-4,-1)$ を通るので $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+4}{-8}=z+1$ などでもよい。

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ をそれぞれ求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。（8 点）

$|\vec{a}|=\sqrt{(-4)^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=6$（2 点）

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$（2 点）

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-4\cdot1+4(-4)+(-2)(-1)=-4-16+2=-18$（4 点）

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。（8 点）

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-18}{6\cdot3\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（ここまでで 4 点）より，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ である。

(4) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。（8 点）

$\vec{e}=(x,y,z)$ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{e}=\vec{b}\cdot\vec{e}=0$, $|\vec{e}|=1$ より，

連立方程式 $-4x+4y-2z=0$, $x-4y-z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$ が成り立つ。（ここまでで 4 点）

これを解くと，$\vec{e}=\pm\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)=\pm\dfrac{1}{3}(2,1,-2)$ となる。

(5) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に平行で点 $(1,2,3)$ を通る平面の方程式を求めよ。（8 点）

$\vec{e}$ に垂直なので，$\vec{n}=(2,1,-2)$ として，求める平面は $\vec{n}$ に垂直で点 $(1,2,3)$ を通るので，

$2(x-1)+1\cdot(y-2)+(-2)(z-3)=0 \iff (2x-2)+(y-2)+(-2z+6)=0 \iff 2x+y-2z+2=0$

である。

志望専攻	専攻	受験番号	

令和８年度専攻科　学力検査による選抜　問題

数　学　　　４の４

得点	

4．次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=\log(1+x)$ の導関数 y'，第 2 次導関数 y''，第 3 次導関数 $y^{(3)}$，第 4 次導関数 $y^{(4)}$ および第 n 次導関数 $y^{(n)}$ $(n \geqq 1)$ を求めよ。（10 点）

$y' = \dfrac{1}{1+x}$ （2 点），$y'' = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ （2 点），

$y''' = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ （2 点），$y'''' = \dfrac{-6}{(1+x)^4}$ （2 点），

$y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ （2 点）

(2) $|x|<1$ のとき，$\log(1+x)$ をマクローリン展開せよ。（10 点）

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}|_{x=0}}{n!}x^n = \log 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

(3) $|x|<1$ のとき，(2) で求めた $\log(1+x)$ のマクローリン展開を用いて，$\log\dfrac{1+x}{1-x}$ をマクローリン展開せよ。（10 点）

$\log(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n}x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$ より，

$\log\dfrac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{n}x^n$

$= \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{2m-1}x^{2m-1}$ である。

(4) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$ の $x=0$ における第 5 次近似式を用いて，$\log 3$ の近似値を既約分数で求めよ。（10 点）

$\dfrac{1+x}{1-x} = 3 \iff 1+x = 3x-3 \iff 2x = 4 \iff x = \dfrac{1}{2}$ より，

$\log 3 = \log\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ （ここまでで 5 点）なので，

$$\sum_{m=1}^{3} \frac{2}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1} = \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{3\cdot 2^3} + \frac{2}{5\cdot 2^5} = \frac{3\cdot 5\cdot 2^4 + 5\cdot 2^2 + 3\cdot 1}{3\cdot 5\cdot 2^4} = \frac{263}{240}$$ である。